13 1127-21

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Könyvtára

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI

7

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Л. А. ЖЕКУЛИН, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962 év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI ИЮЛЬ, 1961 **Вып. 7**

MTA Számítástechnikai Könyvtára

СОДЕРЖАНИЕ

Башаринов А. Е. Вопросы статистики автоматического воспроизведения образов при многокадровом наблюдении 1035
Флейшман Б. С. О переходном режиме загрузки памяти кибернетического устройства статистического воспроизведения образов 1041
Зятицкий В. А. Моделирование загрузки памяти кибернетического устройства методом самоанализа 1049
Нестерук В. Ф. К теории оптимального обнаружения составного сигнала при коррелированных помехах 1055
Стратонович Р. Л. Оптимальный прием узкополосного сигнала с неизвестной частотой на фоне шумов 1063
Дорман М. И. Спектр колебания, частота которого проходит через нуль 1076
Тихонов В. И. Марковский характер огибающей квазигармонических флуктуаций 1082
Ризкин И. Х. О характеристиках нелинейных элементов делителей частоты . . 1092
Иванчиков В. И. Некоторые вопросы теории рефракции электромагнитных волн 1100
Павлов П. П. Электромагнитное поле и распределение тока вдоль бесконечно длинного неизолированного провода в проводящей среде 1106
Хохлов Р. В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях 1116
Бененсон Л. С. Расчет фазовой скорости волн в искусственном металлодиэлектрике с учетом гармоник тока на элементах структуры 1128
Шестопалов В. П., Булгаков А. А., Булгаков Б. М. Теоретическое и экспериментальное исследования спирально-диэлектрических антенн 1136
Бахрах Л. Д., Вавилова И. В. Сферические двухзеркальные антенны 1146
Матвеев Р. Ф. Расчет попутного потока в длинной волноводной линии 1157
Гуревич С. Б. Чувствительность телевизионных систем с различными параметрами разложения 1165
Петров Е. Н. К теории плоскоэлектродного триода с нулевым пространственным зарядом в зазоре сетка — анод 1170
Брагинский В. Б., Дианова В. А., Мустель Е. Р. Исследование работы умножителя частоты, использующего нелинейную емкость $p-n$-перехода . . . 1173
Михайловский Л. К., Макарищев В. П., Поллак Б. П., Фабриков В. А. Нелинейные гиромагнитные эффекты нутационного типа в ферритах 1178
Микаэлян А. Л., Антоньянц В. Я., Турков Ю. Г. Явления взаимной связи резонатора с ферритом 1184
Родак М. И. К расчету поляризаций переменного магнитного поля, соответствующих экстремальным вероятностям перехода при электронном парамагнитном резонансе 1194

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Ван Хуань-чжо. Расчет согласующей металлической вставки в волноводе круглого сечения 1202
Федотов А. П., Тепляков В. А. О требованиях к стабильности амплитуд и фаз полей в резонаторах линейного ускорителя 1205

Фетина В. Н. О возбуждении четных гармоник при феррорезонансе 1207
Находкин Н. Г., Мельник П. В. Фотоэффект в области мягких рентгеновских лучей 1209

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Петров И. М., Тысляцкий Г. С. По поводу статьи Л. П. Куклева и Ю. П. Озерского «Сравнение двух методов декодирования интервальных кодов» . . . 1211
Куклев Л. П., Озерский Ю. П. Ответ на письмо И. М. Петрова и Г. С. Тысляцкого 1213
Хлебников Н. С., Меламид А. Е. К вопросу о влиянии поляризации света на фотоэффект сложных катодов 1215

Адрес редакции: Москва К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники АН СССР, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-06889 Подписано к печати 29/VI 1961 г. Тираж 6000 экз. Зак. 1818
Формат бум. 70×108¹/₁₆ Печ. л. 15,75. Бум. л. 5,75 Уч.-изд. листов 17,1

2-я типография Издательства Академии наук СССР Москва, Шубинский пер., 10

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 7

ВОПРОСЫ СТАТИСТИКИ АВТОМАТИЧЕСКОГО ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБРАЗОВ ПРИ МНОГОКАДРОВОМ НАБЛЮДЕНИИ

А. Е. Башаринов

Рассмотрены статистические показатели устройств автоматического воспроизведения образов при многокадровом наблюдении. Приведены соотношения для расчета загрузки емкости памяти электронной вычислительной машины в стационарном режиме для алгоритмов со случайной длительностью. Отмечены возможности экономии емкости памяти при использовании двухпороговых процедур селекции.

1. Принципы построения устройств автоматического воспроизведения образов рассмотрены в [1] и [2].

В системе с конечным числом ячеек подлежащий воспроизведению образ представляет собой некоторое состояние группы ячеек (при бинарном квантовании каждая ячейка имеет два состояния).

Рассмотрим для определенности случай двумерной совокупности. Ограниченность емкости памяти как правило не позволяет реализовать параллельную обработку данных всех ячеек и поэтому используется последовательный способ, при котором ячейки поочередно коммутируются в течение времени кадра и отбираются лишь ячейки с «ненулевым» состоянием.

Вакс [3] рассматривал образ в виде следа изображения, искаженного действием помех. В случае искажения образов при воздействии помех воспроизведение с высокой надежностью может быть достигнуто при совместной обработке данных за несколько кадров.

Способы сопоставления данных зависят от свойств образа, подлежащего воспроизведению, и, в частности, от стабильности картины во времени.

В простейшем случае образ состоит из отдельных «точек», положение которых сохраняется стабильным за время наблюдения (образ «нулевого» порядка).

При линейном смещении точек в интервале нескольких кадров образ описывается уравнением первого порядка. В более общем случае, когда образ может быть описан уравнением n-го порядка, можно говорить об образе n-го порядка.

2. Устройство воспроизведения образов производит селекцию сигнальных импульсов в потоке импульсов помех, возникающих на выходе коммутирующей системы кадрового опроса состояния ячеек.

Селекция сигнальной последовательности достигается путем сопоставления данных за несколько кадров и логическим отбором по принятому критерию.

Процесс селекции можно представить состоящим из сеансов, относящихся к обработке данных, связанных с выявлением отдельных образов (истинных или ложных).

Длительность сеанса является случайной величиной с законом распределения, зависящим от принятого алгоритма селекции *.

---

* В отличие от случаев, характерных для техники массового обслуживания, функция распределения длительности сеанса имеет неэкспоненциальный характер.

Алгоритмы селекции могут различаться по характеру зависимости числа ячеек памяти от продолжительности сеанса, как алгоритмы с фиксированной загрузкой памяти в сеансе и алгоритмы с возрастающей загрузкой памяти в продолжение сеанса.

3. Рассмотрим характеристики загрузки емкости памяти для алгоритмов селекции, использующих фиксированное число ячеек памяти в продолжение сеанса.

Число ячеек, занятых в произвольный момент n, является случайной величиной, определяемой соотношением *

$$N(n) = \sum_{s=s_0}^{n} \sum_{k=0}^{\nu_s} \varepsilon_k(n, s), \tag{1}$$

где $\varepsilon_k(n, s)$ — случайная величина, равная нулю или единице в зависимости от состояния загрузки ячейки на n-м кадре, занятой впервые в s-м кадре (моменты времени считаются дискретно); ν_s — случайная величина, обозначающая число импульсов в кадре.

Среднее значение числа занятых ячеек определяется по соотношению (1):

$$\overline{N(n)} = \sum_{s=s_0}^{n} \overline{\left[\sum_{k=0}^{\nu_s} \varepsilon_k(n, s)\right]}. \tag{2}$$

Используя теорему Вальда о среднем значении суммы случайных величин при случайном числе слагаемых [8], получим

$$\overline{\sum_{k=0}^{\nu_s} \varepsilon_k(n, s)} = \bar{\nu}_s \, \overline{\varepsilon_k(n, s)}, \tag{3}$$

$$\overline{\varepsilon_k(n, s)} = 1 - F(n - s), \tag{4}$$

где $F(n - s)$ представляет функцию распределения длительности испытаний.

Предельное значение величины $\overline{N(n)}$ при $s_0 \to -\infty$ показывает среднюю загрузку емкости памяти в стационарном режиме:

$$\lim_{s_0 \to -\infty} \overline{N(n)} = \sum_{s=-\infty}^{n} \bar{\nu}_s [1 - F(n - s)] = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{\nu}_l [1 - F(l)]. \tag{5}$$

В случае потока стационарной интенсивности

$$\bar{\nu}_l = \text{const}.$$

Переходя к непрерывному времени, получим, что

$$\bar{\nu}_l \sum_{l=0}^{\infty} [1 - F(l)] \to \frac{\bar{\nu}_l}{\Delta t} \int_0^{\infty} [1 - F(t)] \, dt, \tag{6}$$

т. е. в стационарном режиме

$$\bar{N} = \bar{\varkappa} \bar{t}, \tag{7}$$

где $\bar{\varkappa} = \bar{\nu}_l / \Delta t$ — средняя плотность входного потока; $\bar{t}$ — средняя длительность испытаний.

Рассмотрим загрузку емкости памяти, вызываемую входным потоком помех **.

* Предполагается, что отсутствие отметки во всех элементах представляет маловероятное событие.

** Входной поток характеризуется вероятностями появления импульсов помех $P_{\text{п}}$ и импульсов сигнала $P_{\text{сп}}$.

В этом случае $\nu_l = mp_{ш}$ и $\overline{N} = mp_{ш}\overline{n}$; таким образом, среднее число ячеек памяти, занятых в стационарном режиме, определяется произведением средней плотности потока помех на среднюю длительность сеанса селекции (при произвольном законе распределения длительности) *.

4. Величина дисперсии загрузки емкости памяти и вероятность пропуска за счет перегрузки в системах с конечной емкостью памяти могут быть определены на основании соотношений, полученных в теории массового обслуживания. Заменим поток, возникающий в рассматриваемой схеме на выходе коммутирующего устройства, пуассоновским потоком с эквивалентным средним числом импульсов в единицу времени.

Хинчин [4] показал, что при бесконечной емкости памяти в случае пуассоновского входного потока при произвольном законе распределения длительности обработки вероятность загрузи k ячеек в стационарном режиме определяется законом Пуассона:

$$p_k = \frac{(\overline{\nu}\,\overline{n})^k}{k!} e^{-(\overline{\nu n})}. \tag{8}$$

Среднее число занятых ячеек равно дисперсии:

$$\overline{N} = \sigma_N^2 = \overline{\nu}\,\overline{n}. \tag{9}$$

При расчете загрузки емкости памяти ограниченного объема (число ячеек равно M) может быть использована теорема Севастьянова [5], согласно которой при пуассоновском потоке и произвольном законе распределения длительности обработки вероятность загрузки k ячеек определяется соотношением Эрланга

$$p_k = \frac{\dfrac{(\overline{\nu}\,\overline{n})^k}{k!}}{\sum\limits_{s=1}^{M} \dfrac{(\overline{\nu n})^s}{s!}}. \tag{10}$$

При $(\overline{\nu n}) \geqslant 1$, что как правило имеет место **, соотношение (10) можно приближенно представить в виде

$$p_k \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\overline{\nu n}}} - \sqrt{\overline{\nu n}}\right)^2}}{\int\limits_{\sqrt{\overline{\nu n}}}^{\frac{M}{\sqrt{\overline{\nu n}}} - \sqrt{\overline{\nu n}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}. \tag{12}$$

Как и в случае устройств с бесконечной емкостью памяти, среднее значение и дисперсия числа занятых ячеек определяются соотношением (9).

Характерна малая величина относительного среднеквадратичного отклонения при большом среднем значении числа занятых ячеек:

$$\frac{\sigma_N}{\overline{N}} \ll 1 \text{ при } \overline{N} = (\overline{\nu n}) \gg 1. \tag{11}$$

5. При использовании алгоритмов, требующих загрузки возрастающего числа ячеек в продолжение сеанса, в качестве показателя возрастания числа занятых ячеек можно взять целочисленную функцию $f(s\,*)$ аргумента, указывающего текущее время после начала сеанса.

* Результаты расчета загрузки емкости памяти методом конечно-разностных уравнений, приведенных в [3], удовлетворительно совпадают с расчетами по (7) (см. [9] и [10]).

** Число ячеек памяти M составляет величину порядка 10^3—10^4.

Число занятых ячеек в системе аналогично (1) определится соотношением

$$N(n) = \sum_{s=1}^{n} f(n-s) \sum_{k=1}^{\nu_s} \varepsilon_k(n, s), \tag{13}$$

где $\varepsilon_k(n, s)$, как и ранее, — случайная величина, равная нулю или единице в зависимости от состояния ячейки в n-м кадре, занятой впервые в s-м кадре.

При помощи преобразований, аналогичных (4) — (6), получим соотношение для расчета среднего числа ячеек памяти, занятых в стационарном режиме, в виде

$$\overline{N} = \overline{\varkappa} \int_0^{\infty} f(t)\,[1 - F(t)]\,dt, \tag{14}$$

где $F(t)$ — функция распределения длительности испытаний во всех ячейках, занимаемых в сеансе, в момент t после начала сеанса.

Среднее число ячеек памяти, получаемых из (14), можно, например, вычислить в случае $f(s) = s^k$.

Используя соотношение вида

$$\int_0^{\infty} t^k\,[1 - F(t)]\,dt = \frac{1}{k+1}\,\overline{t^{k+1}}, \tag{15}$$

получим, что среднее число ячеек в стационарном состоянии определяется зависимостью

$$\lim_{n\to\infty} \overline{N(n)} = \frac{1}{k+1}\, m p_{\text{ш}} \overline{n^{k+1}}. \tag{16}$$

В отличие от случая алгоритма с фиксированной загрузкой памяти в сеансе, использование алгоритмов с нарастающим числом занятых ячеек приводит к зависимости загрузки емкости памяти от высших моментов функции распределения длительности испытаний.

В частности, при линейной зависимости числа занятых ячеек от продолжительности сеанса средняя загрузка емкости памяти определяется вторым моментом функции распределения длительности испытаний.

6. При выборе алгоритмов селекции образов должны учитываться показатели надежности воспроизведения, требуемая емкость памяти, сложность реализации и т. д.

Алгоритмы могут строиться с использованием однопороговых и двухпороговых [8] критериев.

Характерной особенностью статистически оптимальных алгоритмов является необходимость удерживать данные в памяти в течение всего времени сеанса, что приводит к загрузке значительного объема емкости памяти.

При использовании неоптимальных алгоритмов запоминания данных на все время обработки не требуется и оказывается возможным проводить анализ серии импульсов одного канала (или группы каналов) за несколько кадров.

Рассмотрим случай воспроизведения образа нулевого порядка. Оптимальный алгоритм селекции по данным n кадров состоит в сравнении числа превышений порога с критическим значением (селекция по критерию «k из n»). Неоптимальные алгоритмы могут основываться на критериях «j из l», где $l < n$.

Наиболее простым способом селекции образов нулевого порядка является отбор по однократному превышению порога (использование критерия «1 из n»).

В случае воспроизведения образов первого, второго и т. д. порядков применение оптимальных алгоритмов оказывается затруднительным в силу сложности обработки и естественными оказываются критерии типа «j из l».

Например, при селекции образов первого порядка могут быть использованы критерии «3 из 3», «3 из 4» и т. д.

Первые две отметки используются для формирования контура образа (следа), после чего проверяется попадание третьей отметки на продолжение одного из намеченных следов.

Аналогичный прием может быть использован при селекции образов второго порядка (здесь могут быть использованы критерии «4 из 4», «4 из 5» и т. д.).

Отметки в трех кадрах используются для формирования контура образа (следа), после чего проверяется попадание четвертой отметки на продолжение следа.

Сравнение эффективности различных подоптимальных алгоритмов селекции проводилось ранее [3, 7] и не является целью настоящей работы.

Можно отметить заметную экономию в загрузке емкости памяти, достигаемую при использовании двухпорогового последовательного анализа, по сравнению с однопороговой процедурой селекции (см. Приложение).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравнение средней длительности испытаний при однопороговой и двухпороговой селекции

В случае классического однопорогового алгоритма при достаточной длительности интервала обработки n, когда для накопленных значений может быть использован нормальный закон

$$n_0 = \frac{(|\lambda_F| + |\lambda_D|)^2}{\rho^2}, \tag{I}$$

где

$$\rho^2 = \frac{(p_{сш} - p_ш)^2}{p_ш(1 - p_ш)};$$

λ_D — квантиль значений вероятности правильного воспроизведения D; λ_F — квантиль вероятности ложной отметки F.

При $F \ll D$ $\quad |\lambda_F| \gg |\lambda_D|$; $\quad |\lambda_F| \simeq \sqrt{2|\ln F|}$. Согласно (I) получим

$$n_0 \simeq \frac{2p_ш(1 - p_ш)}{(p_{сш} - p_ш)^2} |\ln F|. \tag{II}$$

В случае двухпорогового алгоритма приближенные выражения для средних времен анализа приведены в [6]. При $(p_{сш} - p_ш) \ll p_ш$

$$\bar{n}_{сш} \simeq \frac{2Dp_ш(1 - p_ш)}{(p_{сш} - p_ш)^2} |\ln F|, \tag{III}$$

$$\bar{n}_ш \simeq \frac{2p_ш(1 - p_ш)}{(p_{сш} - p_ш)^2} |\ln(1 - D)|. \tag{IV}$$

Используя (II) — (IV), получим отношения средних времен анализа при последовательном алгоритме ко времени анализа при однопороговом наблюдении:

$$\xi_{сш} = \frac{\bar{n}_{сш}}{n_0} \simeq D, \tag{V}$$

$$\xi_ш = \frac{\bar{n}_ш}{n_0} \simeq \frac{\ln(1 - D)}{\ln F}. \tag{VI}$$

Выражения (V) и (VI) показывают, в случае несимметричных требований к допустимым вероятностям пропусков и ложных срабатываний, экономию в длительности испытаний, а следовательно, и экономию в емкости памяти при использовании последовательных двухпороговых алгоритмов по сравнению с однопороговыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич, О принципах построения читающих машин, Радиотехника 1960, **15**, 2, 3.
2. В. С. Файн, О принципах построения машин для опознавания образов, Радиотехника, 1960, **15**, 3, 13.
3. N. Wax, Signal-to noise improvement the statistics of track population, J. Appl Phys., 1955, **26**, 5, 586.
4. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 49.
5. Б. А. Севастьянов, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложения к телефонным системам с отказами, Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, 1, 106.
6. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман, М. А. Самохина, Бинарные накопительные системы с двухпороговыми анализаторами, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 9, 1419.
7. M. Schwartz, A coincidence procedure for signals detection, IRE Trans, 1956, IT-2, 4, 135.
8. A. Wald, Sequential analysis, N. Y., 1947.
9. Б. С. Флейшман, О переходном режиме загрузки памяти кибернетического устройства статистического воспроизведения образов, Радиотехника и электроника 1961, **6**, 7, 1041.
10. В. А. Зятицкий, Моделирование загрузки памяти кибернетического устройства методом самоанализа, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 7, 1049.

Поступила в радакцию
15 VI 1960

О ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ ЗАГРУЗКИ ПАМЯТИ КИБЕРНЕТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКОГО ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ОБРАЗОВ

Б. С. Флейшман

Получено выражение для производящей функции числа занятых ячеек памяти кибернетического устройства, обслуживающего поток вызовов. Проведен расчет переходного режима загрузки памяти такого устройства. Из полученных соотношений, как частный случай, следуют известные соотношения теории массового обслуживания. Доказан универсальный характер распределения числа испытаний при последовательном анализе близких гипотез и приведены кривые загрузки памяти в этом случае.

В связи с работой кибернетических устройств воспроизведения сигналов и образов на фоне шумов [1, 2, 3, 4] возникает наряду со статистическими задачами ряд проблем из теории массового обслуживания. Обыкновенно на вход такого кибернетического устройства может поступать либо поток «шумовых» выборок, либо поток, состоящий из смеси шумовых и «сигнальных» выборок. При этом возникают разнообразные задачи фильтрации сигнальных выборок от шумовых. При ограниченном объеме памяти кибернетического устройства решение такого рода задач нельзя найти обычными оптимальными методами математической статистики (метод Неймана-Пирсона или последовательный анализ). Общие оптимальные принципы решения здесь не сформулированы. Одной из частных задач, имеющей, однако, первостепенной практическое значение, является задача изучения вероятностного режима загрузки памяти кибернетического устройства, возможное переполнение которой из-за ее конечности нежелательно. В стационарном режиме решение поставленной задачи содержится в [4]. В работе [1] приведена система конечно-разностных уравнений для подсчета среднего числа занятых ячеек памяти в нестационарном (переходном) режиме. В этой работе при широких допущениях получены средние дисперсии и распределения числа занятых ячеек памяти в нестационарном случае.

1. Пусть на вход кибернетического устройства с бесконечным числом $M = \infty$ ячеек памяти поступает поток независимых вызовов. Будем характеризовать его случайной функцией $\varkappa(s)$, равной числу вызовов, поступивших в промежутке времени t $(s < t \leqslant s + h)$, где $h > 0$ — шаг дискретизации времени. Будем считать, что $\varkappa(s)$ и $\varkappa(s')$ — независимые случайные величины при любых $s \neq s' \geqslant 0$. Пусть с каждым моментом s связана случайная функция $\nu(s)$, означающая время обслуживания вызова, если он поступил в момент s, отсчитываемое с момента его возникновения до окончания обслуживания. Будем считать, что $\nu(s)$ не зависит от $\varkappa(s')$ при любых s и $s' \geqslant 0$ и имеет функцию распределения

$$P(\nu(s) < t) = F_s(t). \tag{1}$$

Рассмотрим сначала случай дискретного наблюдения реально непрерывного потока вызовов $s = jh$, $\nu(s) = ih$ $(i, j = 0,1, 2,\ldots, h = \text{const} > 0)$, когда моменты возникновения вызовов и окончания их обслуживания неразличимы, если они находятся внутри промежутков времени $t\,(s < t \leqslant s + h)$ и отождествляются, например, с $s + h$.

Пусть каждый возникший вызов обслуживается (статистически анализируется) в отдельной ячейке памяти кибернетического устройства

вплоть до момента вынесения окончательного статистического решения о его шумовом или сигнальном характере, после чего ячейка памяти очищается и может воспринимать другие вызовы. При этих условиях число $\mu(t)$ занятых ячеек памяти кибернетического устройства в момент t является случайной целочисленной функцией. Требуется найти его распределение $P(\mu(t) = m)$ по заданным распределениям $P(\varkappa(s) = \kappa)$ и $P(\nu(s) < t) = F_s(t)$. Введем производящие функции

$$g_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\varkappa(s) = k)\, x^k \tag{2}$$

и

$$G_t(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P(\mu(t) = m)\, x^m. \tag{3}$$

Можно показать (см. Приложение 1), что $G_t(x)$ имеет следующее о с н о в н о е для дальнейшего изложения представление:

$$G_t(x) = \prod_{s=h}^{t} g_s\{1 + [1 - F_s(t-s)](x-1)\}. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по x, получим выражения для среднего $E\mu(t)$ и дисперсии $D\mu(t)$:

$$E\mu(t) = G_t'(1) = \sum_{s=h}^{t} E\varkappa(s)\,[1 - F_s(t-s)], \tag{5}$$

$$D\mu(t) = G_t''(1) + G_t'(1) - [G_t'(1)]^2 =$$

$$= E\mu(t) + \sum_{s=h}^{t} [D\varkappa(s) - E\varkappa(s)]\,[1 - F_s(t-s)]^2, \tag{6}$$

имеющие смысл при конечных $E\varkappa(s)$ и $D\varkappa(s)$ соответственно.

Если $\varkappa(s)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(s) = E\varkappa(s) = D\varkappa(s)$

$$P(\varkappa(s) = k) = P_{\lambda(s)}(k) = \frac{\lambda^k(s)}{k!} e^{-\lambda(s)},$$

то $\mu(t)$ также имеет распределение Пуассона

$$P(\mu(t) = m) = P_{\Lambda(t)}(m)$$

с параметром

$$\Lambda(t) = E\mu(t) = D\mu(t) = \sum_{s=h}^{t} E\varkappa(s)\,[1 - F_s(t-s)], \tag{7}$$

в чем легко убедиться подстановкой соответствующего значения производящей функции в этом случае $g_s(x) = e^{(x-1)\lambda(s)}$ в соотношение (4).

Если в этом случае число элементов памяти кибернетического устройства конечно, $M = \text{const} \gg \Lambda(\infty)$, то $\mu(t)$ имеет, как можно показать, усеченное на M распределение Пуассона

$$P(\mu(t) = m) = P_{\Lambda(t),M}(m) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda^m(t)}{m!} \Big/ \displaystyle\sum_{r=0}^{M} \frac{\Lambda^r(t)}{r!} & \text{при } 0 \leqslant m \leqslant M, \\ 0 & \text{при } m > M. \end{cases} \tag{8}$$

Соотношение (8) указывает на то, что формула Эрланга [5] имеет место и в дискретном нестационарном пуассоновском потоке и в произвольном распределении времени обслуживания (вероятность переполнения памяти соответствует вероятности отказа [5, 6, 11]).

2. Практически наиболее интересным является однородный случай, когда распределения $\varkappa(s) = \varkappa$ и $\nu(s) = \nu$ не зависят от момента времени. В этом случае соотношения (5), (6) и (7) заметно упрощаются. Имеем

$$E\mu(t) = E\varkappa \sum_{s=h}^{t} [1 - F(s)] \leqslant E\varkappa\, E\nu, \tag{9}$$

так как $\sum_{s=h}^{\infty} [1 - F(s)] = E\nu$, и

$$D\mu(t) = E\mu(t) + (D\varkappa - E\varkappa) \sum_{s=h}^{t} [1 - F(s)]^2 \leqslant E\mu(t) + |D\varkappa - E\varkappa| E\nu, \tag{10}$$

так как $\sum_{s=h}^{t} [1 - F(s)]^2 \leqslant \sum_{s=h}^{t} [1 - F(s)] \leqslant E\nu$.

В случае однородного Пуассоновского потока $\mu(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром

$$\Lambda(t) = E\mu(t) = D\mu(t) = E\varkappa \sum_{s=h}^{t} [1 - F(s)] \leqslant \Lambda(\infty) = E\varkappa E\nu. \tag{11}$$

Часто на практике $\Lambda(t)$ достаточно велико ($\Lambda(t) \geqslant 100$) и в этом случае распределение Пуассона переходит в нормальное распределение (со средним $\Lambda(t)$ и стандартным отклонением $\sqrt{\Lambda(t)}$), близкое к δ-распределению.

При этих обстоятельствах, когда $\Lambda(t) \leqslant \Lambda(t) + u\sqrt{\Lambda(t)} \leqslant M = \text{const}$, не имеет практического смысла различение случаев $M = \text{const}$ и $M = \infty$, и вероятность переполнения памяти, равная $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$, относительно небольшим занижением $\Lambda(t) = M - u\sqrt{M}$ по сравнению с M может быть сделана сколь угодно близкой к нулю при $u > 3$.

При $\Lambda(t) < 100$ вероятность переполнения памяти может быть оценена на основании таблицы, приведенной в [11].

Если производится дискретный анализ $N \geqslant M$ элементов фазового пространства с вероятностями $p_{\text{с}}$ и $p_{\text{ш}}$ появления импульсов соответственно в сигнальных и шумовых элементах, то $\varkappa$ имеет распределение Пуассона с параметром

$$\lambda = E\varkappa = N\,[\theta\, p_{\text{с}} + (1 - \theta)\, p_{\text{ш}}],$$

где θ и $1 - \theta$ означают доли сигнальных и шумовых элементов в фазовом пространстве.

3. Рассмотрим случай больших $\Lambda(t)$, когда δ-распределение $\mu(t)$ определяется единственным параметром $\Lambda(t)$. В этом случае $\Lambda(t)$ можно выразить в компактной форме. В самом деле, введем новую шкалу времени $\bar{t} = t/E\nu$, $\bar{s} = s/E\nu$ и обозначим (см. (11))

$$a(\bar{t}) = \frac{\Lambda(\bar{t}E\nu)}{\Lambda(\infty)} = \frac{1}{E\nu} \sum_{s=h}^{\bar{t}E\nu} [1 - F(\bar{s}\,E\nu)] \leqslant 1. \tag{12}$$

Тогда, используя соотношение (12) и полагая $F(\bar{s}E\nu) = W(\bar{s})$, будем иметь при $\bar{t} = \text{const}$ и $E\nu \to \infty$

$$a(\bar{t}) = \int_{0}^{\bar{t}} [1 - W(\bar{s})]\, d\bar{s} \leqslant 1. \tag{13}$$

Рассмотрим частные случаи соотношения (13).

а) Случай постоянного времени обслуживания (критерий Неймана — Пирсона). Здесь

$$W(\bar{s}) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant \bar{s} < 1, \\ 1 \text{ при } \bar{s} \geqslant 1, \end{cases} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), будем иметь

$$a(\bar{t}) = \begin{cases} \bar{t} \text{ при } 0 \leqslant \bar{t} < 1, \\ 1 \text{ при } \bar{t} \geqslant 1. \end{cases}$$

б) Случай экспоненциального времени обслуживания, характерного для телефонных приложений. В этом случае

$$W(\bar{s}) = 1 - e^{-\bar{s}} \tag{15}$$

и, подставляя (15) в (13), будем иметь

$$a(\bar{t}) = 1 - e^{-\bar{t}}.$$

в) Вальдовское распределение [7] времени обслуживания

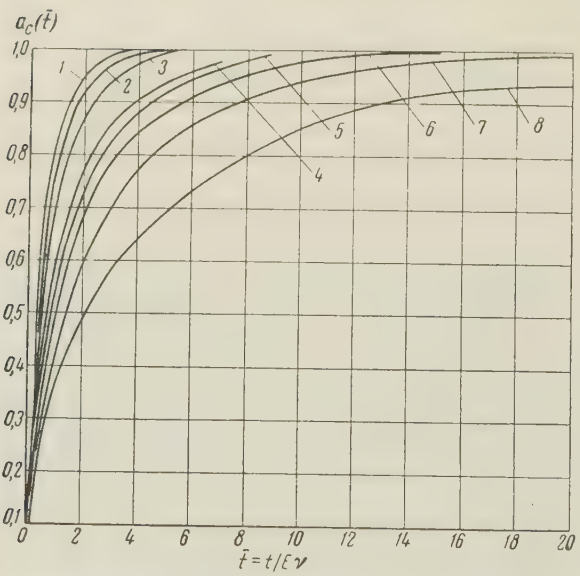
$$W(\bar{s}) = W_C(\bar{s}) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}} \int_0^{\bar{s}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{C}{2}(x + x^{-1} - 2)\right] dx, \tag{16}$$

где

$$C = (E\nu)^2/D\nu \tag{17}$$

(см. Приложение 2), и

$$a(\bar{t}) = a_C(\bar{t}) = \bar{t}\,[1 - W_C(\bar{t})] + 1 - W_C(1/\bar{t}). \tag{18}$$



Семейство нормированных кривых $a_C(\bar{t})$ при различных значениях $C=(E\nu)^2/D\nu$:

1 — $C = 3{,}0$; 2 — $C = 2{,}0$; 3 — $C = 1{,}0$; 4 — $C=0{,}5$; 5 — $C=0{,}4$; 6 — $C = 0{,}3$; 7 — $C = 0{,}2$; 8 — $C = 0{,}1$

Соотношение (18) получается интегрированием по частям соотношения (13) с использованием тождества

$$\int_0^y x W_C'(x)\,dx \equiv \int_0^{1/y} W_C'(x)\,dx.$$

Распределение (16) было получено Вальдом [7] для случая выбора между гипотезами о величине среднего значения нормального распределения. Однако можно показать, что оно имеет универсальный характер (см. Приложение 2) для случая выбора между двумя близкими гипотезами (обнаружение сигнала при малом отношении сигнал/шум) при несимметричных порогах. Последние обстоятельства оправдывают табулирование $W_C(s)$ и численный расчет $a_C(\bar{t})$.

Семейство нормированный кривых $a_C(t)$, вычисленных по таблицам функций $W_C(\bar{s})$ при различных $C = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1,0; 2,0 и 3.0.

риведено на рисунке. По ним среднее число занятых ячеек в момент t ычисляется по формуле

$$E\mu(t) \simeq E\varkappa E\nu a_C(t/E\nu), \tag{19}$$

де C определяется из соотношения (17).

Сопоставление кривых $a_C(t)$ с аналогичными кривыми, рассчитанными утем решения на вычислительной машине системы конечно-разностных равнений [1], а также с конкретными реализациями $\mu(t)$ указывает на орошее согласование (см. [10]).

4. В заключение рассмотрим случай непрерывного наблюдения потока ызовов, когда $h \to 0$ и поток является ординарным [5], т. е.

$$P(\varkappa(s) = 1) = \lambda(s)\,h + o(h),$$

$$P(\varkappa(s) > 1) = o(h),$$

ткуда

$$P(\varkappa(s) = 0) = 1 - \lambda(s)\,h + o(h),$$

$$g_s(x) = e^{(x-1)\lambda(s)h + o(h)}.$$

В этом случае производящая функция $\mu(t)$, где $t = jh = \text{const}$ $(j = t/h \to \infty)$, ак легко показать, имеет вид

$$\widetilde{G}_t(x) = \lim_{h\to 0} G_t(x) = e^{(x-1)\widetilde{\Lambda}(t)}, \tag{20}$$

де

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \int_0^t \lambda(s)\,[1 - F_s(t-s)]\,ds, \tag{21}$$

е. $\mu(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\widetilde{\Lambda}(t)$.

Из соотношения (21) следуют результаты, полученные для $F_s(t) = F(t) = 1 - e^{-t}$ ([5], стр. 78) и $\lambda(s) = \lambda$, $F_s(t) = F(t)$ ([5], стр. 80). При конечном числе $M \geqslant \Lambda(t)$ ячеек памяти $\mu(t)$ имеет усеченное на M распределение Пуассона с параметром $\widetilde{\Lambda}(t)$. В этом случае при $t \to \infty$, $\lambda(s) = \lambda$ и $F_s(t) = F(t)$, когда $\widetilde{\Lambda}(\infty) = E\varkappa E\nu$, получаем результат [6]

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод основного выражения для производящей функции $G_t(x)$

Зафиксируем множество $S = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ моментов, в которых появляется хотя бы один вызов $(0 \leqslant r \leqslant n = t/h)$. Легко видеть, что случайная функция $\mu_S(t)$, означающая число занятых ячеек памяти в момент t, при фиксации S имеет вид

$$\mu_S(t) = \sum_{s\in S} \sum_{k_s=1}^{\varkappa(s)} \varepsilon_{k_s}(s,\ t), \tag{1}$$

где $\varepsilon_{k_s}(s,\ t)$ — случайная функция, определенная на k_s-м вызове, поступившем в момент s $(1 \leqslant k_s \leqslant \varkappa(s))$, принимающая значение 0, если k_s-й вызов обслужен к моменту t, и значение 1 в противном случае.

Другими словами, случайная функция

$$\varepsilon_{k_s}(s,\ t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F_s(t-s) & 1 - F_s(t-s) \end{pmatrix}$$

имеет производящую функцию

$$h_{\varepsilon_{k_s}}(x) = F_s(t-s) + [1 - F_s(t-s)]\,x = 1 + [1 - F_s(t-s)](x-1).$$

При фиксированных s и t и различных k_s $\varepsilon_{k_s}(s,\ t)$ являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими и от $\varkappa(s)$. Поэтому для внутренней суммы (1) можно воспользоваться свойством итерации соответствую-

щих производящих функций при образовании сложного распределения [9]. Для внешней суммы (I) можно воспользоваться свойством мультипликативности производящих функций при образовании композиции соответствующих распределений, так как $\varkappa(s)$ независимы при различных s.

В соответствии с вышеизложенным производящая функция $\mu_S(t)$ имеет вид

$$G_{t,S}(x) = \prod_{s \in S} \widetilde{g}_s \{1 + [1 - F_s(t-s)](x-1)\}, \tag{II}$$

где

$$\widetilde{g}_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\varkappa(s) = k)\, x^k / [1 - P(\varkappa(s) = 0)] =$$

$$= [g_s(x) - P(\varkappa(s) = 0)] / [1 - P(\varkappa(s) = 0)] \tag{III}$$

— производящая функция распределения $\varkappa(s)$ при условии, что $\varkappa(s) > 0$.

Легко показать, что производящая функция $\mu(t)$ имеет представление

$$G_t(x) = \sum_{S \in R_n} \prod_{s \in S} [1 - P(\varkappa(s) = 0)] \prod_{s \in \bar{S}} P(\varkappa(s) = 0)\, G_{t,S}(x), \tag{IV}$$

где суммирование ведется по S, пробегающему всевозможные 2^n наборов $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\} = R_n$, а $\bar{S}$ означает дополнение S к R_n. Подставляя в соотношение (IV) явное выражение $G_{t,S}(x)$ (II), после несложных преобразований с учетом соотношений (III) получим окончательно

$$G_t(x) = \prod_{s=h}^{t} g_s \{1 + [1 - F_s(t-s)](x-1)\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство универсальности распределения $W_C(x)$ для случая близких гипотез

Пусть требуется произвести выбор между двумя гипотезами $H_0\,(a = a_0)$ и $H_1\,(a = a_1 > a_0)$, O значении параметра однопараметрического семейства плотностей вероятности $f_a(x)$ случайной величины ξ с вероятностями ошибок 1-го и 2-го родов α и β соответственно. При использовании последовательного анализа для решения поставленной задачи число испытаний ν для вынесения окончательного решения оказывается случайной величиной. Если $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^2\right]$, то $\nu / E\nu$ имеет распределение (16) (см. [7]). Рассмотрим случай близких гипотез, когда $\Delta_1 = a_1 - a_0 \sim |\Delta| = |a - a_0| \to 0$, при условии малости α бо́льшего порядка, чем β ($\alpha = o(\beta)$, $\beta \to 0$). Пусть при всех значениях x, на которых определена случайная величина ξ, в окрестностях значений $a = a_0$ и $a = a_1$ $f_a(x) \geqslant \varepsilon > 0$, $f_a(x)$ и ее частные производные по a до третьего порядка включительно непрерывны, а $[\ln f_a(x)]^k$ ($k = 1, 2, 3$) со своими производными по a до третьего порядка включительно равномерно интегрируемы по всем x.

Тогда, используя формулу Тейлора, можно показать, что

$$E_a\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) \ln(f_{a_0}(x) / f_{a_0}(x))\, dx = \Delta_1\left(\frac{\Delta}{\Delta_1} - 0{,}5\right) J_2(a_0) + O(\Delta_1^3), \tag{V}$$

$$D_a\zeta = \Delta_1^2 J_2(a_0) + O(\Delta_1^3), \tag{VI}$$

$$E_a|\zeta - E_a\zeta|^3 = \Delta_1^3 J_3(a_0) + O(\Delta_1^4), \tag{VII}$$

где

$$\zeta = \ln(f_{a_1}(\xi) / f_{a_0}(\xi));$$

$$J_k(a_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial \ln f_a(x)}{\partial a}\right|^k_{a=a_0} f_{a_0}(x)\, dx > 0 \quad (k = 2, 3);$$

используя также результаты [7] и [8], (V) и (VI), будем иметь соответственно

$$E_a\nu = \frac{\ln \frac{1}{\beta} + O(\alpha)}{|E_a\zeta|} \sim \frac{\ln \frac{1}{\beta} + O(\alpha)}{\Delta_1^2 \left| \frac{\Delta}{\Delta_1} - 0{,}5 \right| J_2(a_0)}, \tag{VIII}$$

$$D_a\nu = \frac{D_a\zeta}{|E_a\zeta|^3}\left[\ln \frac{1}{\beta} + O(\alpha)\right] \sim \frac{\ln \frac{1}{\beta} + O(\alpha)}{\Delta_1^4 \left| \frac{\Delta}{\Delta_1} - 0{,}5 \right| J_2^2(a_0)} \tag{IX}$$

в предположении $\Delta < 0{,}5\ \Delta_1$.

Используя неравенство Чебышева и соотношения (VIII) и (IX), легко получим оценку вероятности

$$P\left[\nu = O\left(\Delta_1^{-2} \ln \frac{1}{\beta}\right)\right] > 1 - O\left(\frac{1}{\ln \beta}\right). \tag{X}$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству универсальности распределения (16) для случая близких гипотез. Последовательная процедура выбора между гипотезами H_0 $(a = a_0)$ и H_1 $(a = a_1 > a_0)$ основывается на двухпороговом анализе коэффициента правдоподобия

$$l_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i, \tag{XI}$$

где $\zeta_i = \ln (f_{a_1}(x_i) / f_{a_0}(x_i))$ является функцией i-го выборочного значения x_i.

Введем новые случайные величины

$$\tilde{\zeta}_j = \sum_{i=s(j-1)+1}^{sj} \zeta_i.$$

Тогда (XI) можно записать в виде

$$l_\nu = \sum_{j=1}^{\tilde{\nu}} \tilde{\zeta}_j + \sum_{i=s\tilde{\nu}+1}^{\nu} \zeta_i, \tag{XII}$$

где $\tilde{\nu} = [\nu/s]$ — целая часть числа ν/s. Пусть порядок роста $s = O\left[\left(\Delta_1^{-2}\sqrt{\ln \frac{1}{\beta}}\right)^{1-\eta}\right]$, где η $(0 < \eta < 1)$ произвольно мало. Тогда ляпуновское отношение (см. (VI) и (VII)) имеет вид

$$\sqrt{sD_a\zeta} \Big/ \sqrt[3]{sE_a|\zeta - E_a\zeta|^3} \sim \sqrt{J_2(a_0)} \Big/ \sqrt[3]{J_3(a_0)}\sqrt[6]{s} \to 0,$$

то обеспечивает асимптотическую нормальность $\tilde{\zeta}_j$. Вместе с тем, если $\nu = O\left(\Delta_1^{-2} \ln \frac{1}{\beta}\right)$, то можно показать, что при $\Delta_1 \to 0$ распределение l_ν определяется лишь первой случайной суммой соотношения (XII). Определим теперь последовательную процедуру выбора между двумя гипотезами

$$H_0^*\left(a^* = a_0^* = \frac{a_0 + a_1}{2} + \Delta_1 \frac{E_{a_0}\zeta}{D_{a_0}\zeta}\right) \quad \text{и} \quad H_1^*\left(a^* = a_1^* = \frac{a_0 + a_1}{2} + \Delta_1 \frac{E_{a_1}(\zeta)}{D_{a_1}\zeta}\right)$$

относительно среднего значения

$$a^* = \frac{a_0 + a_1}{2} + \Delta_1 \frac{E_a\zeta}{D_a\zeta}$$

нормально распределенной случайной величины ξ^*, имеющей плотность вероятности

$$f_{a^*}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - a^*)^2\right]$$

известной дисперсией $\sigma^2 = \Delta_1^2 / sD_a\zeta$.

Легко показать, что соответствующий элементарный логарифм коэффициента правдоподобия имеет вид

$$\zeta^* = \ln\left(f^*_{a_1}(\xi^*) / f^*_{a_0}(\xi^*)\right) \qquad \frac{\Delta_1}{\sigma^2}\left(\xi^* - \frac{a_0 + a_1}{2}\right)$$

и он снова нормален ($sE_a\zeta$, $sD_a\zeta$).

Таким образом, случайные величины $\widetilde{\zeta}_j$ и ζ^* асимптотически одинаково нормально распределены. Отсюда с очевидностью следует одинаковая асимптотическая распределенность чисел ν и ν^* испытаний для окончания обеих процедур. Но ν^* имеет согласно [7] распределение (16). Отсюда следует, что и ν имеет то же распределение. Заметим, что наше утверждение делалось в предположении, что $\nu = O\left(\Delta^{-2}\ln\frac{1}{\beta}\right)$. Таким образом, оно остается в силе лишь с вероятностью (X), близкой к единице. Если $\Delta > 0$, $5\Delta_1$, то, поменяв местами во всех предыдущих рассуждениях α и β, мы придем к аналогичному заключению.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Wax, Signal-to-noise improvement and the statistics of track populations, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 5, 586.
2. А. А. Харкевич, О принципах построения читающих машин, Радиотехника, 1960, **15**, 2, 3.
3. В. С. Файн, О принципах построения машин опознавания образов, Радиотехника, 1960, **15**, 3, 13.
4. А. Е. Башаринов, Вопросы статистики автоматического воспроизведения образов при многокадровом наблюдении, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 7, 1035.
5. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, **49**.
6. Б. А. Севастьянов, Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказом, Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, 1, 106.
7. A. Wald, Sequential analysis, N. Y., 1947.
8. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман, Применение метода последовательного анализа в системах двухзначной передачи при релеевских флуктуациях интенсивности сигналов, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 2, 155.
9. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей, ИЛ, 1952.
10. В. А. Зятицкий, Моделирование загрузки памяти кибернетического устройства методом самоанализа, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 7, 1049.
11. Г. П. Башарин, О предельном распределении времени занятости полнодоступного пучка линий, Теория вероятностей и ее применения, 1960, **5**, 2, 246.

Поступила в редакцию
15 VI 1960

1961 № 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРУЗКИ ПАМЯТИ КИБЕРНЕТИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА МЕТОДОМ САМОАНАЛИЗА

В. А. Зятицкий

Предлагается прямой метод анализа загрузки памяти электронной вычислительной машины (эвм), входящей в состав кибернетического устройства, — метод самоанализа — при бинарной дискретизации данных, поступающих на вход этого устройства и их последовательном анализе.

Даны алгоритмическое описание метода, блок-схема алгоритма (разработанная методика может быть использована на любой эвм), приведены параметры программы, по которой проводился расчет.

Одним из основных параметров, лимитирующих возможность воспроизведения образов кибернетическим устройством, является объем памяти электронной цифровой вычислительной машины, входящей в это устройство [1, 2].

В [1] дан расчет памяти в стационарном, а в [2] — в нестационарном случае. В [3] получены системы конечно-разностных уравнений для подсчета среднего числа занятых ячеек вычислительной машины в нестационарном случае при бинарной дискретизации (уравнения решаются при помощи машины). В настоящей статье предложен прямой метод анализа загрузки памяти машины — метод самоанализа, который можно использовать и в ряде случаев, не рассмотренных в [2, 3;]; сопоставлены кривые загрузки памяти, рассчитанные методами, приведенными в работах [2] и [3], а также сравнены кривые [2] с кривыми, полученными методом самоанализа.

1. Рассмотрим фазовое пространство R, состоящее из большого, но конечного числа N элементов: $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_N\}$. В элементах r_i на общем шумовом фоне ожидается появление образов, состоящих из отдельных сигналов. Сигналы со временем либо остаются неподвижными, либо перемещаются из элемента в элемент. В случае поэлементного опознания образа, в отличие от опознания образа в целом, для расчета загрузки памяти учет геометрической конфигурации образа не имеет существенного значения, а существенна лишь общая доля сигнальных элементов из R, входящих в ожидаемые образы.

Выделение сигнальных элементов из R производит кибернетическое устройство, имеющее электронную вычислительную машину с объемом памяти в M ячеек. Интересен случай, когда $M \ll N$.

Говоря далее о вызове из r_i-го элемента, мы подразумеваем под этим возникновение сигнала в r_i-м элементе фазового пространства (в случае бинарной дискретизации это означает превышение интенсивности некоторого порога в элементе).

Остановимся на работе кибернетического устройства. Оно много раз проводит поочередный просмотр элементов $r_i\,(i = 1,2,\ldots,N)$ * и устанавливает жесткую связь между поступающим вызовом и некоторой свободной ячейкой памяти машины (далее мы будем для сокращения называть ее ячейкой). При этом в ячейку засылается фиксированное число f_1 — начальная характеристика элемента. С течением времени в этой ячей-

* Период одного просмотра примем за единицу дискретного времени.

ке происходит накопление данных, образующих текущую характеристику f элемента из R. Как только кибернетическое устройство устанавливает шумовой или сигнальный характер элемента по f, отвечающая этому элементу ячейка памяти очищается и может быть использована в дальнейшем. Наша задача заключается в том, чтобы произвести расчет загрузки памяти электронной вычислительной машины.

2. Рассмотрим случай последовательного анализа данных при их бинарной дискретизации. Этому соответствует следующий алгоритм [3], эквивалентный алгоритму последовательного анализа.

После каждого вызова из данного элемента (превышение интенсивностью первичного порога X_1) в соответствующей ячейке памяти начинает накапливаться случайное число $f = f_\nu$ («вес» по терминологии [3]):

$$f_\nu = f_1 + \sum_{i=1}^{\nu} [\xi_i l - (1 - \xi_i)], \tag{1}$$

где ξ_i — случайная величина, принимающая значение 1 или 0 соответственно при превышении или непревышении интенсивностью вторичного порога X_2 при i-м просмотре указанного элемента фазового пространства R (значение l см. в (9), $f_1 > 0$ см. в (8)). Ячейка очищается, если выявляется шумовой ($f \leqslant 0$) или сигнальный ($f \geqslant f_A$) характер элемента, где f_A см. в (7). При $0 < f < f_A$ испытание продолжается, т. е. в следующий момент времени изменяем f по формуле (1) и снова применяем наш критерий.

3. Приступим к описанию прямой машинной реализации алгоритма [2], при которой машина сама анализирует загрузку своей памяти (самоанализ).

3-1. Решая вопрос о загрузке памяти электронной вычислительной машины, мы должны подсчитать количество ячеек, содержащих числа $0 < f < f_A$, где f — текущая характеристика элемента, отмеченного в памяти машины.

3-2. При этом нам безразлично, как осуществляется реальная связь между элементом и ячейкой, хранящей f.

3-3. Пункт 3-2 дает возможность отказаться от требования жесткости связи элемент — соответствующая фиксированная ячейка (см. п. 1) и предположить наличие достаточно гибкой связи элемент — соответствующая ячейка (см. 3-6 — 3-6-2).

3-4. Для осуществления 3-1 в предположении 3-3 потребуем, чтобы все ячейки машины, где хранятся числа f, были расположены п о д р я д , б е з п р о п у с к о в.

3-5. Предположим также, что все возникающие вызовы появляются в конце просмотра.

Пусть в конце $(t-1)$-го просмотра в памяти машины с числами f остается $\mu^*[(t-1)]$ ячеек, и в кибернетическое устройство поступает $\varkappa[(t-1)]$ новых вызовов. Тогда каждое из $\varkappa[(t-1)]$ чисел f_1 засылаем в ячейки с номерами

$$\mu^*[(t-1)] + 1,\ \mu^*[(t-1)] + 2,\ \ldots,\ \mu^*[(t-1)] + \varkappa[(t-1)].$$

Всего перед началом t-го просмотра занято числами f $\mu(t)$ ячеек:

$$\begin{gathered} \mu(t) = \mu^*[(t-1)] + \varkappa[(t-1)], \\ \mu^*(0),\ f = f_j\ (t-1), \end{gathered} \tag{2}$$

где j — номер ячейки, содержащей f; $\langle j \rangle$ — число, стоящее в ячейке j ($\varkappa(t)$ в общем случае подчиняется закону Пуассона [2]).

3-6. Пусть производится t-й просмотр фазового пространства R, т. е. по формуле (1) обрабатываются текущие характеристики f, хранящиеся в памяти машины.

В результате обработки $\langle j\rangle = f_j(t-1)$ получаем $\langle j\rangle = f_j(t)$. Положим, что на данном этапе обработки имеется d чисел f (d — номер последней ячейки, хранящей f):

$$\mu^*(t) \leqslant d \leqslant \mu(t) \qquad (3)$$

Покажем, как осуществляется требование 3-4 в зависимости от полученного значения $\langle j\rangle = f_j(t)$ (3-6-1 — 3-6-2 : $j < d$).

3-6-1. Если $f_j(t) \leqslant 0$ или $f_j(t) \geqslant f_A$, то в ячейку j засылается число $f_d(t-1)$ *, т. е.

$$\langle j\rangle = f_d(t-1);$$

снова применим к $\langle j\rangle = f_d(t-1)$ формулу (1).

3-6-2. Если $0 < f_j(t) < f_A$, то переходим к обработке числа $\langle j+1\rangle = f_{j+1}(t-1)$.

3-7. Если $d = j$, то после обработки $\langle d\rangle$ по формуле (1) процесс обработки заканчивается и $\mu^*(t)$ равно

$$\mu^*(t) = \begin{cases} d & 0 < f_d(t) < f_A, \\ d-1 & f_d(t) \leqslant 0,\ f_d(t) \geqslant f_A. \end{cases} \qquad (4)$$

3-8. На рис. 1 представлена блок-схема программы, при помощи которой осуществлялось моделирование.

Программа, интерпретирующая метод самоанализа, требует 50 ячеек для команд, еще 5 ячеек занято под константы и 6 ячеек вспомогательные

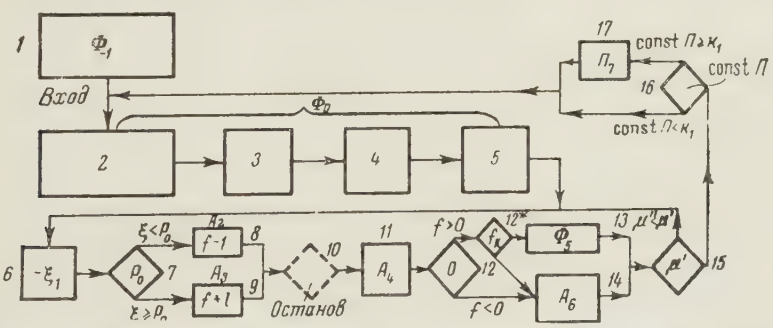


Рис. 1. Блок-схема программы, при помощи которой осуществлялось моделирование:

1 — очистка памяти, построение программы по данному r; *2* — формирование команд засылок и засылка r чисел f_1; *3* — фиксация данной длины массива L; *4* — подсчет общего числа просмотренных ячеек; *5* — восстановление команд и очистка текущего счетчика серии; *6* — ξ-датчик случайных чисел, распределенных по равномерному закону; *7* — сравнение с p_0; *8* — уменьшение текущего веса f на единицу; *9* — увеличение текущего веса f на l; *10* — останов; *11* — фиксация числа просмотренных ячеек серии, где $f > 0$; *12* — сравнение с порогом 0; *12** — сравнение с порогом f_A; *13* — формирование команд для перехода к следующей ячейке; *14* — сокращение длины массива на единицу и засылка f последнего на место $f < 0$; *15*—сравнение с μ' — числом ненулевых элементов серии; *16* — сравнение с постоянной, регулирующей частоту печати; *17* — регулировка частоты печати и печать

(одна под константу переадресации и 5 команд для восстановления сработанных команд). В качестве оперативных ячеек использовалась вся оставшаяся оперативная память электронной вычислительной машины.

Приведем распределение ячеек памяти по блокам программы: I блок — 7 ячеек; II блок — 3 ячейки; III — IV блоки — 8 ячеек; V блок — 3 ячейки; VI блок — 9 ячеек; VII блок — 1 ячейка; VIII блок — 2 ячейки; IX блок — 1 ячейка; XI блок — 1 ячейка; XII блок — 1 ячейка; XIII блок — 5 ячеек; XIV блок — 5 ячеек; XV блок — 1 ячейка; XVI блок — 1 ячейка; XVII блок — 2 ячейки. Числа, введенные в программу, пред-

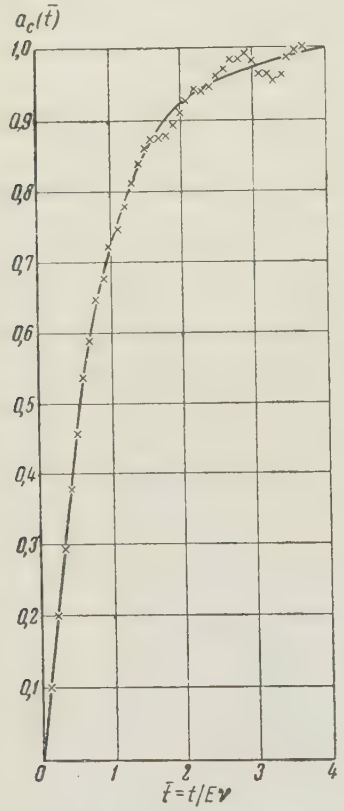
* Число ячеек с числами $0 < f < f_A$ тем самым уменьшается на единицу.

ставлялись в виде двоичных нормализованных чисел. Учитывая конструктивные особенности БЭСМ-1, в программу были включены групповые операции и константы переадресации брались из ДЗУ.

Для получения случайных чисел был использован алгоритм, проверенный Г. А. Ососковым.

Интересно отметить, что для получения результатов по схеме самоанализа потребовалось ~ 3 *мин*, а для идентичных результатов по [3] $\simeq 20$ *мин*.

3-9. Методом, изложенным в 3-1 — 3-7, на БЭСМ-1 получена кривая загрузки памяти $\mu(t)$. Для простоты бралось $\varkappa(t) = \varkappa = E\varkappa = \text{const}$. Отнормировав время t и $\mu(t)$, получим



$$\bar{t}_i = \frac{t}{E\nu}, \quad [a_C^*(\bar{t}) = \frac{\mu(\bar{t}E\nu)}{E\nu\, E\varkappa} \tag{5}$$

(значение $E\nu$ — (см. (10)) среднее время пребывания $f = f_\nu$ в границах $0 < f < f_A$, $E\varkappa$ — среднее число вновь поступающих вызовов). Сопоставим с $a_C^*(\bar{t})$ соответствующую кривую

$$a_C(\bar{t}) = \bar{t}\,[1 - W_C(\bar{t})] + 1 - W_C\left(\frac{1}{\bar{t}}\right) \tag{6}$$

(см. [2]), где $W_C(t)$ — функция Вальда (см. рис. 2). Можно видеть, что получено удовлетворительное совпадение. Это фактически является экспериментальным подтверждением теории, развитой в [1, 2].

Рис. 2. Кривая $a_C(\bar{t})$ при $C = 1{,}5625$. Звездочками нанесены точки кривой $a_C^*(\bar{t})$ ($\alpha = 0{,}8995 \cdot 10^{-6}$; $\beta = 0{,}1$; $p_0 = 0{,}2$; $p_1 = 0{,}2825$; $E\nu = 100$; $f_1 = 20$; $l = 3$; $f_A = 100$; $\varkappa = E\varkappa = 9$)

4. Сравним результаты, полученные методами [2] и [3]. Задаваясь α — вероятностью ошибки 1-го рода; β — вероятностью ошибки 2-го рода; p_1 — вероятностью превышения первичного порога в сигнальном элементе; p_0 — вероятностью превышения первичного порога в шумовом элементе, можно получить параметры [3] при $\alpha \ll \beta$.

$$f_A = \frac{\ln \dfrac{1-\beta}{\alpha\beta}}{\ln \dfrac{1-p_0}{1-p_1}}, \tag{7}$$

$$f_1 = \frac{-\ln \beta}{\ln \dfrac{1-p_0}{1-p_1}}, \tag{8}$$

$$l = \frac{\ln \dfrac{p_0}{p_1}}{\ln \dfrac{1-p_0}{1-p_1}} \tag{9}$$

и параметры [1, 2]

$$E\nu = \frac{f_1}{1 - p_0 - lp_0}, \tag{10}$$

$$C = \frac{(E\nu)^2}{D\nu} = \frac{f_1^2}{E\nu\,(1-l)^2\,p_0\,(1-p_0)}, \tag{11}$$

$$E\mu\,(\infty) = E\varkappa E\nu = Np_{\text{ш}}E\nu, \tag{12}$$

где $p_{\text{ш}}$ — вероятность вызова из шумового элемента ($p_{\text{ш}} \ll p_0$, так как $X_1 > X_2$; предполагается, что число сигнальных элементов R мало по сравнению с числом шумовых элементов).

Обратными преобразованиями легко получить α, β, p_1 через параметры [3], задаваясь дополнительно p_0. Случайное число $\mu\,(t)$ занятых ячеек памяти в дискретный момент времени t представлено в [3] в виде

$$\mu\,(t) = \sum_{f=1}^{f_A} \mu_f\,(t), \tag{13}$$

где $\mu_f\,(t)$ — случайное число занятых ячеек, в которых $f_\nu = f$. Для нормированных средних значений

$$\frac{E\mu_f(t)}{E\mu\,(\infty)} = m\,(t, f), \qquad \frac{E\mu\,(t)}{E\mu\,(\infty)} = m\,(t) \tag{14}$$

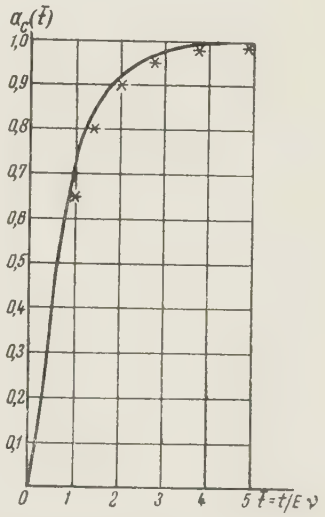


Рис. 3. Кривая $a_C\,(\bar{t})$ при $C = 2{,}02$. Звездочками нанесены точки кривой $m\,(t)$ ($\alpha = 10^{-6}$; $\beta = 0{,}1$; $p_0 = 10^{-2}$; $p_1 = 0{,}04641589$; $E\nu = 105{,}84155$; $f_1 = 61$; $l = 41$; $f_A = 427$)

рекуррентной системе, выведенной в [3] на основе алгоритма п. 2, можно придать следующий компактный вид (параметр $Q = 1$ [3])

$$\left.\begin{aligned} m\,(t, f) &= m^*\,(t, f), \\ m\,(t, f_1) &= m^*\,(t, f_1) + \frac{1}{E\nu} - p_0 m\,[(t-1)], \\ m\,(t, f_A) &= p_0 \sum_{f=f_A-l}^{f_A} m\,(t-1, f), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$m\,(t) = \sum_{f=1}^{f_A} m\,(t, f), \tag{16}$$

причем

$$m^*\,(t, f) = (1 - p_0)\,m\,(t-1, f+1) + p_0 m\,(t-1, f-l), \tag{17}$$

где в правой части $m\,(t-1, x) = 0$ для $x \leqslant 0$. На БЭСМ-1 произведен расчет кривой $m\,(t)$; после нормировки времени $\bar{t} = t/E\nu$ ей была сопоставлена соответствующая кривая (6). Это сопоставление обнаружило хорошее согласование (см. рис. 3). Однако рекуррентность счета по фор-

мулам [3] приводит к накоплению в процессе счета ошибки, что, возможно, сказалось и при просчете точек кривой (рис. 1 в [3]) при $p = 1/4$, $Q = 1/2$ (кривая в действительности идет регулярно ниже, чем в [3]).

В заключение отметим, что моделирование методом самоанализа загрузки памяти не вызывает затруднений и в более сложной ситуации движущихся образцов (см. [1], (13)), при которой теоретический расчет нестационарного режима аналитически весьма сложен.

Выражаю благодарность Б. С. Флейшману, под чьим руководством была выполнена эта работа, и А. Е. Башаринову, принявшему участие в ее обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Башаринов, Вопросы статистики автоматического воспроизведения образов при многокадровом наблюдении, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1035.
2. Б. С. Флейшман, О переходном режиме загрузки памяти кибернетического устройства статистического воспроизведения образов, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 7, 1041.
3. N. Wax, Signal-to-noise improvement the statistics of track populations, J. Appl. Phys., 1955, 26, 5, 586.

Поступила в редакцию
15 VI 1960

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СОСТАВНОГО СИГНАЛА ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХАХ

В. Ф. Нестерук

Рассмотрена задача обнаружения сигнала, составными частями которого являются случайная и детерминированная функции на фоне нормальных коррелированных помех. Установлено общее выражение для коэффициента правдоподобия. Рассмотрены характеристики обнаружения для ряда конкретных случаев.

ВВЕДЕНИЕ

Статистическая задача обнаружения полезного сигнала на фоне флуктуационных помех ставится следующим образом. Входной сигнал $s(t)$, поступающий на приемник, состоит из полезного сигнала $M(t)$ и помехи $n(t)$, так что

$$s(t) = M(t) + n(t). \tag{1}$$

Считается известным, что помеха представляет собой случайную функцию времени с заданной многомерной функцией распределения плотности вероятности порядка H. Относительно функции $M(t)$ предполагается что она зависит от ряда известных и неизвестных параметров. Пусть интервал времени наблюдения равен T. За время T приемник должен дать ответ о наличии или отсутствии полезного сигнала, если поступающий на вход сигнал равен $s(t)$

Решению поставленной задачи при различных условиях, наложенных на функции $M(t)$ и $n(t)$, посвящен ряд работ [1—6]. Согласно общей теории оптимальный приемник, обеспечивающий максимальную вероятность правильного обнаружения D при заданных вероятности ложной тревоги F и времени наблюдения T, должен быть устроен так, чтобы образовывать на выходе коэффициент правдоподобия

$$l(s) = \int \dots \int \frac{P_{M+n}(s)}{P_n(s)} P(M_1, \dots, M_k)\, dM_1 \dots dM_k, \tag{2}$$

где $P_{M+n}(s)$ — функция правдоподобия события s при поступлении на приемник полезного сигнала $M(t)$ и помехи $n(t)$; $P_n(s)$ — функция правдоподобия события s при поступлении на приемник только помехи $n(t)$ и, наконец, $P(M_1, \dots, M_k)$ — функция распределения неизвестных параметров полезного сигнала.

Найденный коэффициент правдоподобия $l(s)$ нужно сравнить с пороговой величиной l_0 и тогда:

$$\begin{aligned} &\text{если } l \geqslant l_0, \text{ то } s = M + n, \\ &\text{если } l < l_0, \text{ то } s = n. \end{aligned} \tag{3}$$

В настоящей статье решается задача обнаружения при следующих предположениях: $n(t)$ — стационарная гауссовская случайная функция, а полезный сигнал $M(t)$ — составной *, т. е.

$$M(t) = m(t) + \mu(t), \tag{4}$$

где $m(t)$ — функция времени с полностью известными параметрами; $\mu(t)$ — стационарная гауссовская случайная функция с заданной много-

* Термин «составной сигнал» в работе [1] имеет другой смысл.

мерной функцией распределения плотности вероятности. Предполагается далее, что случайные функции $n(t)$ и $\mu(t)$ статистически независимы и их средние значения равны нулю.

Таким образом, согласно классификации, данной в работе [3], решается задача сложного обнаружения составного сигнала (4) на фоне коррелированных помех.

1. КОЭФФИЦИЕНТ ПРАВДОПОДОБИЯ

Считаем, что за время наблюдения T произведено H измерений мгновенных значений случайной функции $s(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$ ($k = 1, 2, \ldots, H$; $H\Delta t = T$).

Введем выборки $s(t_k) = s_k$; $n(t_k) = n_k$; $m(t_k) = m_k$; $\mu(t_k) = \mu_k$. Равенство (1) с учетом (4) для выборки будет иметь вид

$$s_k = n_k + m_k + \mu_k. \tag{5}$$

Введем корреляционные функции

$$\overline{n(t)\, n(t+\tau)} = R^n(\tau), \qquad \overline{\mu(t)\,\mu(t+\tau)} = R^\mu(\tau) \tag{6}$$

и соответствующие корреляционные и обратные им матрицы

$$R^n,\ R^\mu,\ D^n = [R^n]^{-1}, \qquad D^\mu = [R^\mu]^{-1}. \tag{7}$$

В силу статистической независимости случайных функций $n(t)$ и $\mu(t)$ корреляционная матрица $R^{n+\mu}$ суммы $n(t) + \mu(t)$ будет равна сумме корреляционных матриц $n(t)$ и $\mu(t)$, т. е.

$$R^{n+\mu} = R^n + R^\mu. \tag{8}$$

Для вычисления $l(s)$ подставим в формулу (2) явное выражение всех подынтегральных функций

$$P_{M+n}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{H}{2}} \operatorname{Det}[R^n]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{H} D^n_{ik}(s_i - M_i)(s_k - M_k)\right\},$$

$$P_n(s) = P_{M+n}(s) \qquad \text{при } M = 0, \tag{9}$$

$$P(\mu_1, \ldots, \mu_H) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{H}{2}} \operatorname{Det}[R^\mu]^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{H} D^\mu_{ik}\mu_i\mu_k\right\}.$$

После подстановки и преобразований формула (2) принимает вид

$$l(s) = \Lambda_1(s)\,\Lambda_2(s - m), \tag{10}$$

где

$$\Lambda_1(s) = \exp\left\{\sum_{i,k=1}^{H} D^n_{ik} s_i m_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{H} D^n_{ik} m_i m_k\right\} \tag{11}$$

— коэффициент правдоподобия, если $M(t) = m(t)$, т. е. когда рассматривается простое обнаружение на фоне коррелированных помех [3];

$$\Lambda_2(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{H}{2}} \operatorname{Det}[R^\mu]^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \exp\left\{\sum_{i,k=1}^{H} D^n_{ik}\eta_i\mu_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{H}(D^n_{ik} + D^\mu_{ik})\,\mu_i\mu_k\right\} \times$$

$$\times\, d\mu_1 \ldots d\mu_H \tag{12}$$

— коэффициент правдоподобия при обнаружении сигнала случайной формы, т. е. если $M(t) = \mu(t)$. Для нашего случая $\eta = s - m$. Для вычисления выражений (10), (11) и (12) введем новые переменные по пра-

илу

$$\mu_k = \sum_{\alpha=1}^{H} b_{k\alpha}\theta_\alpha. \tag{13}$$

ак как матрицы R^n и R^μ, а следовательно и матрицы D^n и D^μ, положи-ельно определенные, то, как известно, из теории [7] существует неосо-енная матрица B с элементами $b_{k\alpha}$, такая, что имеют место равенства

$$B^*D^nB = E = [1, 1, \ldots, 1], \tag{14}$$

$$B^*D^\mu B = U = [u_1, \ldots, u_H], \tag{15}$$

де числа u_k являются корнями характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,[D^\mu - UD^n] = 0 \tag{16}$$

B^* — матрица, транспонированная по отношению к B.

Введем обозначение

$$D^nB = [B^*]^{-1} = C; \quad D^n = CC^* \tag{17}$$

, производя необходимые вычисления, найдем окончательное выражение ля коэффициента правдоподобия

$$l(s) = \frac{\mathrm{Det}\,[R^n]^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{Det}\,[R^\mu]^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha=1}^{H} \sqrt{1+u_\alpha}} \times$$

$$\times \exp \frac{1}{2}\left\{\sum_{\alpha=1}^{H}\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{1+u_\alpha}} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{1+u_\alpha}}\, v_\alpha\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{H} v_\alpha^2 u_\alpha\right\}, \tag{18}$$

де обозначено

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{H} C_{i\alpha}s_i; \quad v_\alpha = \sum_{i=1}^{H} C_{i\alpha}m_i. \tag{19}$$

Из формулы (19) для v_α следует, что v_α не зависит от входного сигнала (t). Из формулы (18) следует монотонное возрастание $l(s)$ от вели-ины

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{H} W_\alpha^2, \tag{20}$$

де

$$W_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_\alpha}}(x_\alpha + u_\alpha v_\alpha). \tag{21}$$

ормулы (20) и (21) определяют структуру оптимального приемника об-аружения составного сигнала. Как следует из этих формул, оптималь-ая процедура обработки входного сигнала $s(t)$ в данном случае содержит ак линейные, так и нелинейные операции, причем линейная обработка роисходит как до детектирования, так и после него. Как известно, для птимального обнаружения сигнала заданной формы достаточно лишь инейной обработки. Из формулы (21) следует, что наличие детерминиро-анной составляющей (v_α) сказывается на общей схеме обработки в осу-ествлении дополнительной линейной операции суммирования x_α с вели-инами $u_\alpha v_\alpha$ до детектирования. Заметим также, что формулы (20) и (21) ожно видоизменить, сохранив при этом только слагаемые, зависящие от s,

$$\varphi'(s) = \sum_{\alpha=1}^{H} \frac{x_\alpha^2}{1+u_\alpha} + 2\sum_{\alpha=1}^{H} \frac{u_\alpha x_\alpha v_\alpha}{1+u_\alpha}. \tag{22}$$

Первое слагаемое определяет структуру оптимального приемника при обнаружении одного лишь сигнала случайной формы. Второе — корреляционное слагаемое — как раз и определяет дополнительные линейные элементы оптимального приемника при обнаружении составного сигнала.

Для дальнейшего необходимо изучить статистические свойства случайных величин W_α и φ.

2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕЛИЧИН W_α И φ

Случайные величины x_α являются нормальными в силу линейности образования их из нормальных случайных величин s_i по формулам (19). Следовательно, нормальными являются и величины W_α, образованные по формулам (21).

1) Числовые характеристики W_α и φ в том случае, когда входной сигнал $s(t) = n(t) + m(t) + \mu(t)$.

Среднее значение W_α

$$\overline{W}_\alpha = v_\alpha \sqrt{1 + u_\alpha}. \tag{23}$$

Находим далее корреляционную функцию величин W_α и W_β

$$\overline{\Delta W_\alpha \Delta W_\beta} = \begin{cases} \overline{(\Delta W_\alpha)^2} = \dfrac{1}{u_\alpha} & \text{при } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{при } \beta \neq \alpha. \end{cases} \tag{24}$$

Из формул (23) и (24) непосредственно следует

$$a_1 = \bar{\varphi} = \sum_{\alpha=1}^{H} \overline{W_\alpha^2} = \sum_{\alpha=1}^{H} \left[\frac{1}{u_\alpha} + v_\alpha^2 (1 + u_\alpha) \right], \tag{25}$$

$$\sigma_1^2 = \overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} = 2 \sum_{\alpha=1}^{H} \left[\frac{1}{u_\alpha^2} + 2 v_\alpha^2 \frac{1 + u_\alpha}{u_\alpha} \right]. \tag{26}$$

2) Числовые характеристики W_α и φ в том случае, когда входной сигнал $s(t) = n(t)$.

Среднее значение W_α

$$\overline{W}_\alpha = \frac{v_\alpha u_\alpha}{\sqrt{1 + u_\alpha}}. \tag{27}$$

Корреляционная функция величин W_α и W_β

$$\overline{\Delta W_\alpha \Delta W_\beta} = \begin{cases} (\overline{\Delta W}_\alpha)^2 = \dfrac{1}{1 + u_\alpha} & \text{при } \beta = \alpha, \\ 0 & \text{при } \beta \neq \alpha. \end{cases} \tag{28}$$

На основании (27) и (28) получим

$$a_2 = \bar{\varphi} = \sum_{\alpha=1}^{H} \overline{W_\alpha^2} = \sum_{\alpha=1}^{H} \left[\frac{1}{1 + u_\alpha} + \frac{u_\alpha^2 v_\alpha^2}{1 + u_\alpha} \right], \tag{29}$$

$$\sigma_2^2 = \overline{(\varphi - \bar{\varphi})^2} = 2 \sum_{\alpha=1}^{H} \left[\frac{1}{(1 + u_\alpha)^2} + 2 \frac{u_\alpha^2 v_\alpha^2}{(1 + u_\alpha)^2} \right], \tag{30}$$

Из выражений (24) и (28) следует, что случайные величины W_α являются некоррелированными и, следовательно, в силу их нормальности все они независимы.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Согласно формулам (18), (20) и (21) оптимальный приемник может
ределять наличие или отсутствие полезного сигнала по схеме:

$$\text{если } \varphi \geqslant \varphi_0, \text{ то } s = M + n,$$
$$\text{если } \varphi < \varphi_0, \text{ то } s = n,$$

φ_0 — пороговое значение φ.

1. Будем считать H большим числом и принимаем аппроксимацию
нкции распределения величины φ законом Гаусса на основании теоремы
пунова в силу (20), (24) и (28). Оценка числа H при заданных значениях
оятности правильного обнаружения D, вероятности ложной тревоги
а также величин a_1, a_2, σ_1^2, σ_2^2 и нормальной аппроксимации зако-
распределения φ, необходимого для различения гипотез, имеется в ра-
е. [8]. Заметим, что нормальный закон достаточно точно аппроксимирует
ствительную функцию распределения лишь в области значений φ,
зких к $\overline{\varphi}$. Это создает трудности при подсчете вероятности ложной
воги F, принимающей на практике малые значения ($10^{-6} - 10^{-4}$) *.
го же время при значениях $D = 0{,}9$ можно с точностью порядка 10%
нять $H \simeq 20$ [9]. Учитывая, что величина функции распределения
ленно меняется в области малых значений F и ограничиваясь указан-
точностью, получим

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\varphi_0 - a_2}{\sigma_2}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{31}$$

a_2 и σ_2 вычисляются по формулам (29) и (30),

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\varphi_0 - a_1}{\sigma_1}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{32}$$

a_1 и σ_1 вычисляются по формулам (25) и (26). Исключая из (31) и (32)
аметр φ_0, найдем характеристику обнаружения составного сигнала,
исящую в общем случае от $2H$ параметров,

$$D = D\,(F;\ u_1, \ldots, u_H;\ v_1, \ldots, v_H). \tag{33}$$

Во многих практических случаях число параметров уравнения (33)
но уменьшить. Действительно, если принять, что $\sigma_1^2 \simeq \sigma_2^2$, то суще-
ует единственный параметр, играющий роль эффективного отношения
нал/помеха,

$$d = \frac{[a_1 - a_2]^2}{\sigma_1^2} \simeq \frac{[a_1 - a_2]^2}{\sigma_2^2}. \tag{34}$$

Соотношение (34) легко устанавливается из формул (31) и (32) при
$\simeq \sigma_2^2$.

На основании формул (26) и (30) заключаем, что условие $\sigma_1^2 \simeq \sigma_2^2$ вле-
за собой требование

$$u_{\text{мин}} \gg 1, \tag{35}$$

$u_{\text{мин}}$ — наименьший корень уравнения (16).

Для выяснения физического смысла такого требования предположим,
матрицы R^n и R^μ коммутируют и пусть v_α^n и v_α^μ — их собственные чис-

* Значительное внимание вопросам аппроксимации действительных функций
ределения законом Гаусса уделено в работе [5].

ла ($\nu_\alpha^n > 0$, $\nu_\alpha^\mu > 0$). Тогда

$$u_\alpha = \frac{\nu_\alpha^n}{\nu_\alpha^\mu}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, H. \tag{36}$$

Рассмотрим след матриц R^n и R^μ:

$$SpR^n = HN = \sum_{\alpha=1}^{H} \nu_\alpha^n, \quad SpR^\mu = HP = \sum_{\alpha=1}^{H} \nu_\alpha^\mu,$$

где N и P — средние мощности помех $n(t)$ и составляющей сигнала $\mu(t)$. Отсюда следует

$$N = \sum_{\alpha=1}^{H} \left(\frac{\nu_\alpha^n}{H}\right), \quad P = \sum_{\alpha=1}^{H} \left(\frac{\nu_\alpha^\mu}{H}\right). \tag{37}$$

Формулы (37) показывают, что средние мощности помех и случайной составляющей сигнала являются суммами «парциальных мощностей», приходящихся на одну «степень свободы».

Формула (36) дает отношение парциальных мощностей помех и составляющей полезного сигнала $\mu(t)$. Таким образом, принятие условия $\sigma^2{}_1 \simeq \sigma^2{}_2$ означает, что рассматривается случай, когда любое из парциальных отношений сигнал/помеха много меньше единицы, т. е. на основании (37) отношение $P/N \ll 1$ (пороговый сигнал). На практике описанные выше условия реализуются, например, при обнаружении какого-либо объекта в присутствии хаотических отражений от «облака отражателей» [5]. Небольшой объем облака отражателей увлекается объектом и отражения, возникающие при этом, должны относиться не к помехам, а к полезному сигналу. Поскольку объем части облака отражателей, создающий полезный сигнал, мал по сравнению с объемом, создающим помехи, то естественно считать $P/N \ll 1$.

Подчеркнем, что все сказанное относится лишь к составляющей полезного сигнала $\mu(t)$. На составляющую сигнала $m(t)$ при этом никаких ограничений не накладывается.

Подставив в (34) значения a_1, a_2 и $\sigma^2{}_1 \simeq \sigma_2{}^2$ и учитывая (35), можно упростить формулу (34):

$$d = r + \rho, \tag{38}$$

где

$$r = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{H} \frac{1}{u_\alpha^2}; \quad \rho = \sum_{i,k=1}^{H} D_{ik}^n m_i m_k.$$

Заметим, что велична r зависит только от свойств случайных функции $\mu(t)$ и $n(t)$, а величина ρ — только от свойств случайной функции $n(t)$ и детерминированной функции $m(t)$.

Если детерминированная часть полезного сигнала преобладает, т. е. $M(t) \simeq m(t)$, то очевидно $r \ll \rho$, из формулы (38) следует $d = \rho$. Величина ρ введена в работе [3] и названа «обобщенным отношением сигнал/помеха при простом обнаружении» *.

Если же преобладает составляющая полезного сигнала случайной формы, т. е. $M(t) \simeq \mu(t)$ и $r \gg \rho$, то имеем

$$d = r = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{H} \frac{1}{u_\alpha^2}. \tag{39}$$

Таким образом, величину r можно назвать эффективным отношением сигнал/ помеха при обнаружении сигнала случайной формы на фоне коррелированных помех.

* В работе [3] величина ρ обозначена буквой μ.

Формула (38) показывает, что при принятых выше условиях эффектив-е отношения сигнал/помеха составляющих полезного сигнала склады-ются.

2. В рамках практического примера, описанного выше, естественно итать энергетические спектры случайных функций $\mu(t)$ и $n(t)$ подобными уг другу:

$$G^{\mu}(\omega) = \gamma G^{n}(\omega), \tag{40}$$

э $\gamma > 0$.

Принятие такого условия основывается на том, что природа случай-х функций $\mu(t)$ и $n(t)$ одинакова, т. е. они создаются различными объе-ми одного и того же облака отражателей.

При выполнении условия (40) матрицы R^n и R^{μ} коммутируют и, как гко показать, в результате имеем

$$\frac{1}{u_1} = \cdots = \frac{1}{u_H} = \gamma = \frac{P}{N}. \tag{41}$$

На основании формул (24) и (28) заключаем, что дисперсии случайных личин W_α будут одинаковыми при $\alpha = 1, 2, \ldots, H$. Это дает возможность казаться от нормальной аппроксимации функции распределения вели-ны φ. Для нахождения вероятностей D и F используем в качестве до-аточной статистики функцию $\psi = \varphi^{1/2}$. Функция распределения вели-ны ψ установлена в работе [10]. На основании [10] и формулы (41) имеем

$$= \frac{(1+\gamma)\exp\left[-\dfrac{A_2^2(1+\gamma)}{2\gamma}\right]}{\gamma A_2^{\frac{H-2}{2}}} \int_{\psi_0}^{\infty} Z^{\frac{H}{2}} e^{-\frac{Z^2(1+\gamma)}{2\gamma}} I_{\frac{H-2}{2}}\left[\frac{(1+\gamma)ZA_2}{\gamma}\right] dZ, \tag{42}$$

$$D = \frac{\exp\left[-\dfrac{A_1^2}{2\gamma}\right]}{\gamma A_1^{\frac{H-2}{2}}} \int_{\psi_0}^{\infty} Z^{\frac{H}{2}} e^{-\frac{Z^2}{2\gamma}} I_{\frac{H-2}{2}}\left(\frac{ZA_1}{\gamma}\right) dZ, \tag{43}$$

е ψ_0 — пороговое значение ψ; $I_n(Z)$ — модифицированная функция Бес-ля порядка n; величина A равна

$$A = \left[\sum_{\alpha=1}^{H} \overline{W}_\alpha^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

На основании (23), (27), (41) и (44) получаем

$$A_1 = \left[\frac{1+\gamma}{\gamma}\rho\right]^{\frac{1}{2}}, \quad A_2 = \left[\frac{\rho}{\gamma(1+\gamma)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что характеристика обнаружения здесь будет трех-раметрической,

$$D = D(F; \gamma; \rho; H). \tag{46}$$

Если детерминированная составляющая полезного сигнала отсутству-, то вероятности D и F подсчитываются при помощи распределения с H степенями свободы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена теория оптимального обнаружения составного сигнала ои коррелированных помехах. Слагающие составного сигнала в отдель-ости могут представлять собой сигналы, имеющие максимальную и ми-имальную вероятности правильного обнаружения [4]. В частных случаях йдены формулы, определяющие вероятности правильного обнаружения, ожной тревоги и эффективное отношение сигнал/помеха. Выражение

(10) остается справедливым, если считать, что функция $m(t)$ имеет неизвестные параметры. Таким образом, формулу (18) без особого труда можно обобщить на случаи, когда начальная фаза $m(t)$ неизвестна или когда случайной является одна из выборок m_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, H$).

Пользуюсь случаем выразить благодарность Н. Н. Порфирьевой и В. А. Соколовой за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости, ГЭИ, 1956.
2. В. Питерсон, Т. Бердсал, В. Фокс, Теория обнаружения сигналов, сб. Теория информации и ее приложения, под ред. А. А. Харкевича, ГИФМЛ, 1959.
3. В. Д. Зубаков, Оптимальное обнаружение при коррелированных помехах, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 12, 1441.
4. В. А. Котельников, Сигналы с максимальной и минимальной вероятностями обнаружения, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 354.
5. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, Изд. Советское радио, 1960.
6. В. Г. Срагович, Об оптимальном обнаружении сигналов на фоне коррелированной гауссовой помехи, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 5, 745.
7. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. 1, ГИТТЛ, 1951.
8. А. А. Петров, Проверка статистических гипотез о типе распределения по малым выборкам, Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, 2, 248.
9. Пороговые сигналы, перев. с англ. под ред. А. П. Сиверса, Изд. Советское радио, 1952.
10. K. S. Miller R. I. Bernstein, L. E. Blumenson, Generalized Rayleigh processes, Quart. Appl. Math., 1958, 16, 2, 137.

Поступила в редакцию
14 XI 1959

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНОЙ ЧАСТОТОЙ НА ФОНЕ ШУМОВ

Р. Л. Стратонович

Найдено апостериорное распределение вероятностей для частоты узкополосного сигнала, искаженного помехами. Получено дифференциальное уравнение оптимальной нелинейной фильтрации и предложена следящая система, осуществляющая оптимальную обработку принятого сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

Узкополосные сигналы вида $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ весьма часто применяются в радиотехнике, причем полезная информация бывает заключена в значениях амплитуды A, фазы φ или частоты ω. Когда в распоряжение наблюдателя поступает суммарный сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$, искаженный помехами $n(t)$, возникает задача оптимального выделения полезного сигнала $s(t)$. Здесь возможно большое число различных частных случаев, так как параметры сигнала могут быть неизвестными или частично известными, постоянными или непостоянными, шумы могут быть гауссовыми или негауссовыми, белыми или коррелированными. В некоторых простейших случаях задача оптимальной фильтрации решается путем применения известных, так сказать «классических» методов. Когда частота известна априори, а «декартовы координаты» $x = A\cos\varphi$, $y = -A\sin\varphi$ образуют гауссовы случайные величины или процессы при гауссовом шуме, достаточно теории линейной фильтрации Винера-Колмогорова. Стоит только предположить, однако, что аплитуда A также является априорно известной (имеет не релеевский, а дельтаобразный закон распределения), как линейная теория окажется недостаточной. Соответствующие этому частному случаю уравнения нелинейной фильтрации рассмотрены в [1]. В общем случае, когда все три параметра A, φ, ω полезного сигнала представляют интерес для наблюдателя и подлежат определению, задача может решаться путем рассмотрения и моделирования системы уравнений оптимальной нелинейной фильтрации, выведенных в [1, 2].

В настоящей статье мы рассмотрим случай, когда для наблюдателя представляет интерес главным образом частота полезного сигнала. Конечно, и в этом случае можно записывать и моделировать систему уравнений для всех трех параметров сразу, а затем пользоваться лишь значением частоты, однако оптимальная система при этом получается довольно сложной. Поэтому мы наметим другой путь решения задачи, подвергая теорию [1] модификации, удобной для данного частного случая *.

Для выделения узкополосного сигнала с неизвестной частотой из шума иногда применяется прием с использованием синхронизации. Принимаемый сигнал подается на генератор, работающий в режиме захватывания, в результате чего частота генератора приблизительно совпадает с частотой полезного сигнала. Такой способ приема, однако, не является оптимальным. Признаком неоптимальности служит уже то обстоятельство, что параметры системы (генератора) берутся не зависящими от интенсивности помех и от быстроты априорных изменений частоты.

* В статье [5], опубликованной после того, как данная работа была сделана в печать, предполагается, что скорость изменения частоты постоянна. Тем самым случай переменной частоты сводится к случаю постоянных параметров, рассмотренному в [2].

В настоящей статье предложены оптимальные приемные системы, построенные по другому принципу, а именно, по принципу слежения за наиболее правдоподобным значением частоты. Для такого слежения может быть применен частотный дискриминатор, управляемый обратной связью. Оптимальная жесткость обратной связи вычисляется теоретически из уравнений оптимальной фильтрации. Она оказывается переменной в соответствии с тем, что значимость получаемой информации непостоянна во времени. Другой отличительной чертой системы является, то, что рассогласование Δ собственных частот контуров дискриминатора не находится в прямой связи со временем априорного непостоянства частоты и с затуханием контуров. Система будет правильно работать и тогда, когда рассогласование Δ меньше разности между оценочной частотой и истинной.

Предлагаемой системе свойственны некоторые трудности, связанные с начальным временем работы, так как в начальный момент оценочная частота может оказаться далекой от истинной и система первое время будет работать в неоптимальном режиме. Эти трудности мы не рассматриваем. Предполагается, что для первоначального обнаружения сигнала и грубой оценки его частоты применяется одна из ранее известных схем, например, схема параллельных контуров [3]. Затем подключается данная система для дальнейшего уточнения частоты и слежения за ее изменениями. Она будет работать в нестационарном режиме. Используемый принцип слежения за частотой в какой-то мере перекликается с идеей «следящей настройки», высказанной ранее [4]. Однако сходство здесь скорее внешнее. Система [4] неоптимальна, так как не использует данные об интенсивности шума и быстроты изменения частоты. В свете приведенных нами рекомендаций идея следящей настройки приобретает принципиально новое содержание.

1. АПОСТЕРИОРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ЧАСТОТЫ

Задача фильтрации узкополосного сигнала является наиболее сложной в том случае, когда его частота априорно неизвестна. В дальнейшем мы ограничимся именно этим случаем, предполагая к тому же, что фаза сигнала имеет равномерный закон распределения, не несет в себе никакой информации и поэтому не представляет интереса. Сначала, до тех пор, пока не будет специально оговорено, параметры сигнала мы предполагаем постоянными, имеющими априорную плотность распределения

$$w_{\mathrm{pr}}(A, \varphi, \omega) = \frac{1}{2\pi} w_{\mathrm{pr}}(A)\, w_{\mathrm{pr}}'(\omega). \tag{1}$$

Пусть искаженный сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$ принимается в течение интервала времени $0 < t < T$. После приема частота ω остается случайной величиной, описываемой апостериорной плотностью распределения $w_{\mathrm{ps}}(\omega, T)$, которую требуется определить.

Если шум $n(t)$ представляет процесс Маркова, то ему соответствует функционал вероятности $W[n(t)]$ [2], который будет использован для отыскания апостериорного распределения. Учитывая статистическую независимость между сигналом и шумом, запишем совместное распределение шума и параметров сигнала A, φ, ω в форме

$$\mathrm{const}\, w_{\mathrm{pr}}(A, \varphi, \omega)\, W[n(t)].$$

Подставляя сюда $n(t) = r(t) - s(t)$, по теореме обратной вероятности находим апостериорное распределение для параметров сигнала:

$$w_{\mathrm{ps}}(A, \varphi, \omega) = \mathrm{const}\, w_{\mathrm{pr}}(A, \varphi, \omega)\, W[r(t) - A\cos(\omega t + \varphi)]. \tag{2}$$

Чтобы получить апостериорное распределение для частоты, остается учесть (1) и проинтегрировать последнее равенство по A и φ. Рассмотрим отдельные частные случаи.

1. Пусть A, φ, ω постоянны и $n(t)$ есть белый шум с корреляционной функцией $\langle nn_\tau \rangle = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau)$.

Тогда

$$W[n(t)] = \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T n^2(t)\,dt\right\}. \tag{3}$$

Формула (2) в этом случае дает

$$w_{ps}(A, \varphi, \omega) = \text{const}\, w_{pr}(A, \varphi, \omega) \exp\left\{-\frac{A^2}{N_0}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt + \right.$$

$$\left. + 2\frac{A}{N_0}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\, r(t)\,dt\right\}. \tag{4}$$

Используя условие узкополосности, при $\omega T \gg 1$ интеграл $\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt$ можно заменить на $T/2$. После этого из (4) получаем

$$w_{ps}(\omega) = \text{const}\, w_{pr}(\omega) \left\langle \exp\left\{-\frac{A^2 T}{2N_0} + 2\frac{A}{N_0}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\, r(t)\,dt\right\}\right\rangle, \tag{5}$$

где косыми скобками обозначено усреднение по априорному распределению амплитуды и фазы. Полученная формула приводит к следующим результатам.

а) Когда амплитуда $A = A$ заранее известна, в (5) остается лишь интеграл по φ, который по известной формуле выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента $I_0(z) = J_0(iz)$. Поэтому

$$w_{ps}(\omega) = \text{const}\, w_{pr}(\omega)\, I_0\left(2\frac{A_0}{N_0} E_T(\omega)\right), \tag{6}$$

где

$$E_T^2(\omega) = \left(\int_0^T \cos\omega t\, r(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_0^T \sin\omega t\, r(t)\,dt\right)^2 =$$

$$= \int_0^T\int_0^T \cos\omega(t - t')\, r(t)\, r(t')\,dt dt'. \tag{7}$$

При условии $\overline{A^2}T/N_0 \gg 1$, которое можно назвать условием хорошей фильтрации, аргумент функции Бесселя значительно превосходит единицу, и можно воспользоваться для нее известным асимптотическим выражением $I_0(z) \simeq (2\pi z)^{-1/2} e^z \simeq \text{const}\, e^z$. Это дает

$$w_{ps}(\omega) = \text{const}\, w_{pr}(\omega)\, e^{2\frac{2A_0}{N_0} E_T(\omega)}. \tag{8}$$

б) Пусть $x = A\cos\varphi$, $y = -A\sin\varphi$ есть независимые гауссовы случайные величины с дисперсией σ^2, что соответствует релеевскому закону распределения амплитуды ($\overline{A^2} = 2\sigma^2$). Формулу (5) можно представить в виде

$$w_{ps}(\omega) = \text{const}\, w_{pr}(\omega) \left\langle \exp\left\{-\frac{T}{2N_0}(x^2 + y^2) + \frac{2x}{N_0}\int_0^T \cos\omega t\, r(t)\,dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2y}{N_0}\int_0^T \sin\omega t\, r(t)\,dt\right\}\right\rangle. \tag{9}$$

Взяв интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-\frac{T}{2N_0}x^2+ux\right\}dx=\left(1+\frac{\sigma^2T}{N_0}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{u^2\sigma^2}{2\left(1+\frac{\sigma^2T}{N_0}\right)}\right],$$

при этом получаем

$$w_{\mathrm{ps}}(\omega)=\mathrm{const}\,w_{\mathrm{pr}}(\omega)\exp\left[\frac{2\sigma^2E_T^2(\omega)}{N_0(\sigma^2T+N_0)}\right]. \tag{10}$$

В частном случае, когда априорный разброс амплитуды велик ($\sigma^2T\gg N_0$), имеем

$$w_{\mathrm{ps}}(\omega)=\mathrm{const}\,w_{\mathrm{pr}}(\omega)\exp\left[\frac{2E_T^2(\omega)}{N_0T}\right]. \tag{11}$$

в) Полученные результаты обобщаются на случай коррелированного гауссова шума $n(t)$. В Приложении 1 показано, что если время наблюдения T значительно превосходит время корреляции шума: $T\gg\tau_{\mathrm{кор}}$, то выведенные формулы сохраняют свой вид. Единственное изменение заключается в том, что N_0 заменяется спектральной плотностью

$$S_n(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\langle nn_\tau\rangle\,dt, \tag{12}$$

неравномерной в диапазоне возможных значений частоты. В частности, формула (11) принимает вид

$$w_{\mathrm{ps}}(\omega)=\mathrm{const}\,w_{\mathrm{pr}}(\omega)\exp\left[\frac{2E_T^2(\omega)}{S_n(\omega)T}\right]. \tag{13}$$

2. Перейдем к случаю априорно непостоянных амплитуды и фазы или, иначе, переменных $x=A\cos\varphi$, $y=-A\sin\varphi$. Пусть последние представляют собой независимые стационарные гауссовы процессы с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle xx_\tau\rangle=\langle yy_\tau\rangle=k_0(\tau)=\sigma^2R\ (\tau). \tag{14}$$

Отметим, что корреляционная функция полезного сигнала при этом выражается формулой

$$\langle ss_\tau\rangle=k_s(\tau)=k_0(\tau)\cos\omega\tau. \tag{15}$$

Если $n(t)$ — белый шум, то для апостериорного распределения частоты получим выражение

$$w_{\mathrm{ps}}(\omega)=\mathrm{const}\,w_{\mathrm{pr}}(\omega)\left\langle\exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\int_0^T(x^2+y^2)\,dt+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)\cos\omega t\,r(t)\,dt+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)\sin\omega t\,r(t)dt\right\}\right\rangle, \tag{16}$$

которое служит обобщением формулы (9). Здесь производится усреднение по случайным функциям $x(t)$, $y(t)$.

Вычисление среднего (16), как показано в Приложении 2, приводит к результату

$$w_{\mathrm{ps}}(\omega)=\mathrm{const}\,w_{\mathrm{pr}}(\omega)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{2}{N_0^2}\int_0^T\int_0^T k_1(t,t')\cos\omega(t-t')\,r(t)\,r(t')\,dt\,dt'\right\}. \tag{17}$$

десь в случае интервалов T, значительно превосходящих по длительности ремя корреляции τ_a флуктуаций амплитуды и фазы, k_1 определяется ормулой

$$k_1(t,\ t') = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')}S_1(\omega)\,d\omega;\quad S_1(\omega) = \frac{S_0(\omega)}{1+\frac{S_0(\omega)}{2N_0}} \tag{18}$$

$$\left(S_0(\omega) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\,k_0(\tau)\,d\tau\right).$$

[ри малых интервалах $T \ll \tau_a$ непостоянство амплитуды и фазы не казывается и можно пользоваться формулой (10). При промежуточных начениях $T \sim \tau_a$ осуществляется переход от $k_1 = \left(\frac{T}{N_0} + \frac{1}{\sigma_2}\right)^{-1}$ к ыражению (18), причем $k_1(t,\ t')$ находится как решение интегрального равнения (XII) (Приложение 2). В частном случае, когда $k_0(\tau) = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|}$, спользуя (18), находим

$$S_1(\omega) = \frac{4\gamma\sigma^2}{\omega^2+\gamma^2+\frac{2\gamma\sigma^2}{N_0}},$$

$$k_1(\tau) = \sigma_1^2 e^{-\gamma_1|\tau|},$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2+\frac{2\gamma\sigma^2}{N_0}},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma_1}\sigma^2. \tag{19}$$

3. До сих пор мы считали частоту ω априорно постоянной величиной. [ротивоположный случай переменной частоты более труден для анализа. тобы избежать усложнений, связанных с точным учетом непостоянства астоты, и в то же время учесть конечность интервалов времени длительностью порядка $\tau_\omega = 1/\beta$, в течение которых ω остается приблизительно остоянной, следует в полученных ранее формулах производить интегрирование не по всему интервалу $0 < t < T$, а лишь по интервалу $-\tau_\omega < t < T$. Иначе конечность τ_ω можно учесть, вводя обрезающий ножитель $e^{-\beta(T-t)}$, который описывает уменьшение роли прежних значений сигнала в определении частоты. Тогда во все соответствующие формулы вместо выражения (7) нужно подставлять

$$E_T^2(\omega) = \int\limits_0^T\int\limits_0^T e^{-\beta(T-t)-\beta(T-t')}\cos\omega\,(t-t')\,r(t)\,r(t')\,dtdt' \equiv X^2+Y^2, \tag{20}$$

де обозначено:

$$X = \int\limits_0^T e^{-\beta(T-t)}\cos\omega\,(T-t)\,r(t)\,dt;$$

$$Y = \int\limits_0^T e^{-\beta(T-t)}\sin\omega\,(T-t)\,r(t)\,dt. \tag{21}$$

ри $T \geqslant 1/\beta$ нижний предел интегрирования можно распространить $0 - \infty$. Вместо (11) в этом случае можно пользоваться формулой

$$w_{ps}(\omega) = \text{const}\ w_{pr}(\omega)\exp\left[\frac{2}{N_0}\frac{2\beta}{1-e^{-2\beta T}}E_T^2(\omega)\right]. \tag{22}$$

2. УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Предыдущее рассмотрение показывает, что в результате теоретического исследования можно получить аналитическое выражение для апостериорного распределения интересующего параметра. Это выражение удобно представить в форме

$$w_{\text{ps}}(\omega) = \text{const}\, e^{\Phi(\omega, T)} \tag{23}$$

и использовать для расчета и конструирования оптимальных фильтрующих систем. Полученные ранее результаты дают различные примеры выражения $\Phi(\omega, T)$. Так, если для конкретности выбрать формулу (11), то получим

$$\Phi(\omega, T) = \ln \omega_{\text{pr}}(\omega) + \frac{2}{N_0 T} E_T^2(\omega). \tag{24}$$

Второй член, зависящий от принятого сигнала, как правило, дает значительно более острый максимум, чем первый член, соответствующий априорным данным. Условие вида $\overline{A^2}\, T/N_0 \gg 1$, при котором это имеет место, можно назвать условием относительно не слишком больших помех. Оно должно выполняться в тех случаях, когда требуется хорошее качество фильтрации, удовлетворительная работа системы в целом. При его выполнении априорные данные не играют существенной роли и их можно не принимать во внимание. Отметим, что при этом условии одновременно теряет значение точный выбор критерия оптимальности, так как различные критерии приведут практически к одним и тем же результатам. Для конкретности будем исходить из критерия максимальной вероятности.

После приема сигнала $r(t)$ на интервале $0 < t < T$ требуется указать оценочное значение частоты, соответствующее виду сигнала $r(t)$. Это значение, зависящее от T, будем обозначать $\omega_0(T)$. Определяя его из условия экстремума выражения (23), имеем

$$\frac{\partial \Phi(\omega, T)}{\partial \omega} = 0 \text{ при } \omega = \omega_0(T). \tag{25}$$

С течением времени T значение $\omega_0(T)$ меняется, поскольку меняются и уточняются наши апостериорные сведения. Оптимальная система, работающая в конечном счете по принципу следящей системы, должна следить за этими изменениями. Дифференцируя (25) по T, находим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega_0(T)}{dT} = \alpha(T)\, \frac{\partial^2 \Phi(\omega_0(T), T)}{\partial \omega \partial T} \tag{26}$$

если обозначить

$$\frac{1}{\alpha(T)} = a(T) = -\frac{\partial^2 \Phi(\omega_0(T), T)}{\partial \omega^2}. \tag{27}$$

Величина $\alpha(T)$ (или $a(T)$) имеет прямой физический смысл. Она описывает апостериорную неточность $\Delta\omega$ в определении параметра ω ($\Delta\omega = \sqrt{\alpha(T)}$). Дифференцируя (27) по T, можно получить уравнение для $\alpha(T)$:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{da}{dT} = -\frac{\partial^3 \Phi(\omega_0, T)}{\partial \omega^2 \partial T} \tag{28}$$

после пренебрежения членом $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \omega^3} \frac{\partial \omega_0}{\partial T}$.

Уравнения (26), (28) представляют собой уравнения оптимальной фильтрации в гауссовом приближении, которые выведены в [1, 2] другим способом. Искомая оптимальная система должна быть сконструирована так, чтобы она управлялась указанными уравнениями. Вид правой части (26

оворит о том, что имеет место слежение за экстремальным значением $_0$, которое дает максимум производной $\partial\Phi/\partial T$. Сигнал рассогласования ри этом пропорционален $\partial^2\Phi/\partial\omega\partial T$. Соответствующий коэффициент пеедачи $\alpha(T)$ зависит от времени. Точное значение этого коэффициента и го зависимость от $r(t)$ не играют принципиальной роли в процессе слекения. В этом отношении оптимальная система разбираемого типа является гибкой. Важным является лишь соотношение по порядку величины

$$\alpha(T) \sim (\Delta\omega)^2. \tag{29}$$

Отмеченная нечувствительность к $\alpha(T)$ позволяет упростить задачу онструирования оптимальных систем, рассматривая не оба уравнения 26), (28) одновременно, а лишь первое, поскольку можно избежать точного определения $\alpha(T)$, и брать вместо (27) какое-то среднее значение

$$\frac{1}{\alpha(T)} = -\overline{\frac{\partial^2\Phi(\omega_0, T)}{\partial\omega^2}}. \tag{30}$$

2. Под $\Phi(\omega, T)$ следует понимать те конкретные выражения, которые олучены в предыдущем разделе. Для примера (24) уравнение (26) имеет ид

$$\frac{d\omega_0}{dT} = \frac{2\alpha}{N_0 T}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[E_T\frac{\partial E_T}{\partial T} + E_T T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E_T}{T}\right)\right]. \tag{31}$$

Как показывает анализ, кардинально важным для целей фильтрации в последнем выражении является первый член. Поэтому мы рассмотрим задачу моделирования уравнений оптимальной фильтрации на примере простейшего уравнения

$$\frac{d\omega_0}{dT} = \frac{2\alpha}{N_0 T}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(E_T\frac{\partial E_T}{\partial T}\right), \tag{32}$$

де согласно (30)

$$\frac{N_0 T}{2\alpha} = \frac{1}{\lambda} = -\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\overline{E_T^2}. \tag{33}$$

В случае более сложных выражений $\Phi(\omega, T)$ и более сложных уравнений фильтрации задача решается принципиально тем же способом, но ожет произойти дополнительное усложнение фильтрующей системы.

Используя (7) и обозначая

$$X = \int_0^T \cos\omega_0(T-t)\, r(t)\, dt,\quad Y = \int_0^T \sin\omega_0(T-t)\, r(t)\, dt, \tag{34}$$

меем

$$E_T^2 = X^2 + Y^2,\quad \frac{\partial(E_T^2)}{\partial T} = 2rX. \tag{35}$$

Поэтому уравнение (32) принимает вид

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial T} = \lambda\frac{\partial}{\partial\omega_0}(rX). \tag{36}$$

Из (34) следует, что $X = X(T)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \omega_0^2 X(t) = \frac{dr(t)}{dt}. \tag{37}$$

Сюда входят величины $\omega_0 = \omega_0(T)$, $X(t)$, относящиеся к различным моментам времени. Поэтому моделирование такого уравнения сопряжено дополнительными трудностями, так как требуется задержка во времени. Когда $\omega_0(T)$ является относительно медленно меняющейся величиной, от (37) можно перейти к уравнению

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \omega_0^2(t)\, X(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \tag{38}$$

которое моделируется значительно проще. Связанная с такой заменой погрешность вполне окупается упрощением оптимальной системы.

Чтобы получить уравнения, которые подлежат непосредственному моделированию, остается избавиться в (36) от производной по ω_0. Это можно сделать двумя разными способами. Первый заключается в том, что рассматриваются два сигнала X, X_Δ, которые определяются уравнениями

$$\ddot{X} + \omega_0^2(t)\, X = \dot{r}, \qquad \ddot{X}_\Delta + [\omega_0(t) - \Delta]^2 X_\Delta = \dot{r}, \tag{39}$$

соответствующие постоянной расстройке Δ. Уравнение (36) при этом заменится уравнением

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\lambda}{\Delta} r [X - X_\Delta]. \tag{40}$$

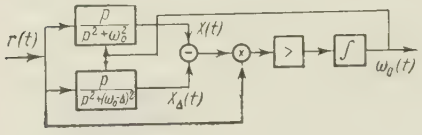


Рис. 1. Блок-схема системы с параллельными контурами

Величину расстройки Δ можно брать произвольной и достаточно малой (меньше затухания контуров и прочих постоянных системы).

Систему, соответствующую уравнениям (39), (40), можно назвать системой с параллельными контурами. Ее блок-схема изображена на рис. 1. Разность напряжений $X - X_\Delta$, полученных на выходе двух колебательных контуров, имеющих расстройку Δ, умножается на $r(t)$, усиливается и подается на блок интегрирования, который вследствие обратной связи корректирует резонансную частоту контуров. Может быть использовано также гетеродинирование с управлением частотой гетеродина.

Напрашивается другой вариант системы с параллельными контурами, в котором частотой контуров управляет не $r[X - X_\Delta]$, а разность амплитуд $E_T - E_{T\Delta}$ колебаний $X(t)$, $X_\Delta(t)$ на выходе контуров. В этом варианте сигналы $X(t)$, $X_\Delta(t)$ сначала подвергаются детектированию, а затем вычитаются. Вопрос о преимуществах того или иного варианта можно решить экспериментально, хотя, по нашему мнению, система первого варианта более гибкая, поскольку она основана на приведенной выше теории *.

Другой способ избавления от производной в (36) заключается в следующем. Сигнал X, как видно из (37), в операторной форме можно записать

$$X = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} r\left(p = \frac{d}{dt}\right). \tag{41}$$

Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{\partial X}{\partial \omega_0} = -2\omega_0 \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)^2} r. \tag{42}$$

Если обозначить

$$Z = \frac{\omega_0 p}{(p^2 + \omega_0^2)^2} r = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} X, \tag{43}$$

то (36) примет вид

$$\dot{\omega}_0 = -2\lambda r Z, \tag{44}$$

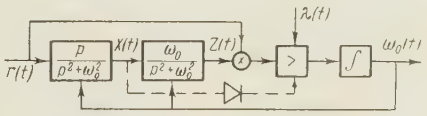
причем в силу (43)

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0 X, \qquad \ddot{X} + \omega_0^2 X = \dot{r}. \tag{45}$$

* Второй вариант соответствует уравнению фильтрации вида $d\omega_0/dT = \alpha \partial\Phi/\partial\omega$.

Блок-схема системы, моделирующей эти уравнения, показана на рис. 2. на имеет два последовательно расположенных колебательных контура, астроенных на общую резонансную частоту, которая управляется обратой связью.

3. В случае совершенно постоянных параметров A, φ, ω колебатеые контуры, входящие в состав оптимальной системы, должны иметь



ис. 2. Блок-схема системы с последовательными контурами

алое, теоретически нулевое затухание. Практически это означает, что но должно быть меньше, чем $1/T$ *. Учет непостоянства параметров приодит к конечному затуханию. Рассмотрим случай непостоянных амплитуы и фазы при $T \gg \tau_a$. Полагая в (17), что $k_1(\tau)$ имеет вид (19), получаем

$$\Phi(\omega, T) = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \widetilde{E}_T^2, \tag{46}$$

де

$$\widetilde{E}_T^2 = \int_0^T \int_0^T e^{-\gamma_1|t-t'|} \cos\omega\,(t-t')\, r(t)\, r(t')\, dt\, dt'.$$

Уравнение фильтрации (26) имеет вид

$$\frac{d\omega_0}{dT} = \lambda \frac{\partial^2}{\partial\omega \partial T} \widetilde{E}_T^2 \left(\frac{1}{\lambda} = \frac{N_0^2}{2\alpha\sigma_1^2} \sim - \overline{\frac{\partial^2 \widetilde{E}_T^2}{\partial\omega^2}}\right), \tag{47}$$

ричем

$$\frac{\partial \widetilde{E}_T^2}{\partial T} = 2r(T) \int_0^T e^{-\gamma_1(T-t)} \cos\omega\,(T-t)\, r(t)\, dt = 2r(T)\, X_1(T). \tag{48}$$

ходящий сюда сигнал X_1 удовлетворяет уравнению

$$[(p+\gamma_1)^2 + \omega_0^2]\, X_1 = pr. \tag{49}$$

Сравнивая (49) с (38), мы видим, что селективный двучлен $p^2+\omega_0^2$ вследствие конечности времени непостоянства $\tau_\alpha \sim 1/\gamma$ нужно заменить трехленом $p^2 + 2\gamma_1 p + \omega_0^2$, соответствующим конечному затуханию контуов (мы полагаем $\gamma_1 \ll \omega_0$).

К аналогичному же результату приводит учет конечного времени , $= 1/\beta$ непостоянства частоты. При этом выражения (34) заменяются ыражениями (21). Из первого равенства (21) получаем

$$X = \frac{p}{p^2 + 2\beta p + \omega_0^2} r. \tag{50}$$

Функция E_T, входящая в уравнение фильтрации

$$\frac{d\omega_0}{dT} = \lambda \frac{\partial}{\partial\omega} \frac{\partial (E_T^2)}{\partial T}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} = \frac{1-e^{-2\beta T}}{4\alpha\beta} N_0 \sim - \overline{\frac{\partial^2 E_T^2}{\partial\omega^2}}\right), \tag{51}$$

* Этот результат связан с особенностями нестационарного режима.

является амплитудой указанного сигнала (50). Вместо уравнения $\partial(E_T^2)/\partial T = 2rX$ она теперь удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial(E_T^2)}{\partial T} = -2\beta E_T^2 + 2rX. \tag{52}$$

Это вносит некоторую модификацию в оптимальную систему, принцип же ее остается без изменения. Так, обозначая $\partial(E_T^2)/\partial\omega = U$, имеем теперь систему уравнений

$$\begin{gathered}(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)\,X = pr,\ (p + 2\beta)\,U = -4rZ,\\ (p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)\,Z = \omega_0 X,\ p\omega_0 = \lambda pU,\end{gathered} \tag{53}$$

которая подлежит моделированию.

4. Нам остается рассмотреть величину коэффициента усиления α или λ, входящего в формулы (26), (32), (44), (51), которому на рис. 1 и 2 соответствует блок усиления.

Как уже отмечалось, флуктуационное изменение этого коэффициента не имеют большого значения, и формулу (27) можно после усреднения заменить формулой (30). Способ определения λ, α проиллюстрируем на примере уравнений (32), (33), (44), а также (51). При вычислении правой части (33) зафиксируем истинное неизвестное значение частоты $\omega = \omega^*$ сигнала. Усредняя по остальным случайным величинам и учитывая, что флуктуации помехи и сигнала независимы, получаем

$$\overline{E_T^2} = \frac{1}{2}\overline{A^2}\,\frac{1-\cos(\omega-\omega^*)\,T}{(\omega-\omega^*)^2} + \frac{1}{2}N_0 T \tag{54}$$

и, следовательно,

$$\frac{N_0}{\overline{A^2}T} = \alpha T^2 f((\omega-\omega^*)\,T),\ f(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\frac{1-\cos z}{z^2}. \tag{55}$$

Если учесть, что $\omega - \omega^*$ имеет тот же порядок величины, что и погрешность $\Delta\omega$ в определении частоты, связанная с α соотношением (29), то будем иметь $\alpha T^2 \sim [(\omega-\omega^*)\,T]^2$. Кроме того, раньше уже указывалось и использовалось условие хорошей фильтрации, имеющее вид

$$\frac{N_0}{\overline{A^2}T} \ll 1 \text{ или } \frac{N_0\beta}{\overline{A^2}} \ll 1 \tag{56}$$

(последнее при непостоянной частоте сигнала). При выполнении этого условия из (55) вытекает неравенство

$$|\omega - \omega^*| \ll 1. \tag{57}$$

Но поскольку $f(z) = \frac{1}{12} - z^2 \ldots$, то

$$\alpha = 12\,\frac{N_0}{\overline{A^2}T^3},\ \lambda = \frac{24}{\overline{A^2}}\frac{1}{T^4}. \tag{58}$$

Переходя к более общему случаю непостоянной частоты, нужно обратиться к уравнению (51) и пользоваться выражением (20). Усредняя его, дифференцируя по ω и используя (57), находим

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{\partial^2\overline{E_T^2}}{\partial\omega^2} = \frac{\overline{A^2}}{2\beta^4}[1 - (2 + \beta^2T^2)\,e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}]. \tag{59}$$

При $\beta T \ll 1$ полученное выражение переходит в (58), а при $\beta T \gg 1$ обращается в постоянную $\lambda_\infty = 2\beta^4/\overline{A^2}$. Когда оптимальная система работает в стационарном режиме (например, при длительном приеме частотно-модулированного сигнала), коэффициент усиления, следовательно,

можно поддерживать постоянным. В начале же работы или при приеме сигнала импульсного характера целесообразно вводить переменный коэффициент усиления в соответствии с (58), (59).

Чтобы избежать необходимости вырабатывать сигнал, явно зависящий от времени по специальному закону, удобно регулировать усиление теми сигналами, которые и без того имеются в схеме. Для этого целесообразно использовать усредненное значение квадрата сигнала

$$Z = -\frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial \omega} = -\frac{1}{2}\int_0^T (T-t)\, e^{-\beta(T-t)} \sin \omega (T-t)\, r(t)\, dt.$$

Вычисляя среднее $\overline{Z^2}$ при учете (56), (57), получаем

$$\overline{Z^2} = \frac{1}{32}\frac{\overline{A^2}}{\beta^4}\left[1-(1+\beta T)\, e^{-\beta T}\right]^2, \tag{60}$$

что совпадает с (59) по порядку величины и по характеру зависимости от T. Поэтому удобно полагать $\lambda = (16\, \overline{Z^2})^{-1}$. Описанное регулирование коэффициента усиления сигналом Z отмечено на рис. 2 пунктиром.

В заключение отметим, что описанная система не является вполне оптимальной по двум причинам. Во-первых, уравнения (26), (28) являются приближенными, поскольку они представляют собой лишь первые уравнения более сложной системы. Связанная с этим погрешность тем меньше, чем больше точность апостериорной оценки частоты. Второе приближение было сделано при переходе от уравнения (37) к (38). Вследствие этих приближений в системе будет происходить некоторая потеря оптимальности, особенно в начальные моменты времени, когда накоплено мало апостериорных сведений. Поэтому вопрос о способе ввода в действие данной системы требует специального рассмотрения.

Автор пользуется случаем выразить благодарность Ю. Б. Кобзареву, А. Е. Башаринову, принявшим участие в обсуждении работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Апостериорная вероятность при коррелированном шуме

Рассмотрим случай коррелированного шума, когда $n(t)$ есть стационарный нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $\overline{nn_\tau} = k(\tau)$. Как известно, функционал вероятности такого процесса имеет вид

$$W[n(t)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T n(t')\, a(t', t)\, n(t)\, dt'dt\right\}, \tag{I}$$

где a — ядро, обратное k, т. е.

$$\int a(t', t)\, k(t-t'')\, dt = \delta(t'-t'') \quad (0 \leqslant t', t'' \leqslant T). \tag{II}$$

Ограничимся теми случаями, когда длительность интервала наблюдения T значительно превосходит время корреляции шума $\tau_{кор}$. Это условие, как правило, выполняется во всех практических случаях. Тогда при подавляющем большинстве значений t', t (везде, за исключением граничных участков $t' \sim \tau_{кор}$, $t \sim \tau_{кор}$, $T - t' \sim \tau_{кор}$, $T - t \sim \tau_{кор}$) функция $a(t', t)$ является функцией разности переменных $a(t', t) = a(t'-t)$, которая находится из аналогичного (II) уравнения

$$\int a(t'-t)\, k(t-t'')\, dt = \delta(t'-t''), \tag{III}$$

по взятого на всей бесконечной прямой $-\infty < t < \infty$. Последнее уравнение решается методом преобразования Фурье. Для изображений

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, a(\tau)\, d\tau, \tag{IV}$$

$$\frac{1}{2} S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, k(\tau)\, d\tau \tag{V}$$

из (III) получаем соотношение

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{S_n(\omega)}. \tag{VI}$$

Формула (2) в данном случае принимает вид

$$w_{ps}(A, \varphi, \omega) = \text{const}\, w_{pr}(A, \varphi, \omega) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T s(t')\, a(t', t)\, s(t)\, dtdt' + \int_0^T\int_0^T s(t')\, a(t', t)\, r(t)\, dtdt'\right\}. \tag{VII}$$

Но

$$\int_0^T s(t')\, a(t', t)\, dt' = \int_0^T A\cos(\omega t' + \varphi)\, a(t' - t)\, dt',$$

так как $a(t', t) = a(t' - t)$. Вследствие условия $T \gg \tau_{кор}$, кроме того, последний интеграл мало чем отличается от соответствующего интеграла с бесконечными пределами интегрирования, который выражается через спектр (IV):

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t' + \varphi)\, a(t' - t)\, dt' = \frac{A}{2}\, e^{i\omega t + i\varphi}\alpha(\omega) + \frac{A}{2}\, e^{-i\omega t - i\varphi}\alpha(-\omega)$$

$$(\alpha(\omega) = \alpha(-\omega))$$

или в силу (VI) через спектральную плотность шума

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t + \varphi)\, a(t' - t)\, dt' = \frac{2}{S_n(\omega)}\, s(t). \tag{VIII}$$

Таким образом, (VII) преобразуется к виду

$$w_{ps}(A, \varphi, \omega) = \text{const}\, w_{pr}(A, \varphi, \omega)\exp\left\{-\frac{1}{S_n(\omega)}\int_0^T s^2(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{S_n(\omega)}\int_0^T s(t)\, r(t)\, dt\right\}, \tag{IX}$$

аналогичному (4). Разница лишь в том, что N_0 заменилось на спектральную плотность $S_n(\omega)$, неравномерную в диапазоне возможных значений частоты. Все выведенные раньше формулы (6)—(11) оказываются справедливыми при соответствующей замене N_0 на $S_n(\omega)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Апостериорная вероятность при флуктуирующих амплитуде и фазе

Чтобы вычислить вероятность (16), найдем среднее

$$m = \left\langle \exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\int_0^T x^2(t)\, dt + \int_0^T x(t)\, u(t)\, dt\right\}\right\rangle \tag{X}$$

$$\left(u(t) = \frac{2}{N_0}\, r(t)\cos\omega t\right)$$

и аналогичное среднее для $y(t)$ и $v(t) = \frac{2}{N_0}\, r(t)\sin\omega t$. Здесь $x(t)$, $y(t)$ — гауссовы процессы (14). В сокращенной (матричной) форме записи (X) принимает вид

$$m = \frac{M[u]}{M[0]},$$

$$M[u] = \text{const}\int\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}x\left(k_0^{-1} + \frac{1}{N_0}\right)x + xu\right]\Pi dx(t).$$

Пользуясь известной общей формулой, получаем

$$M[u] = \text{const} \exp\left[\frac{1}{2} u \left(k_0^{-1} + \frac{1}{N_0}\right)^{-1} u\right].$$

Следовательно,

$$m = e^{\frac{1}{2} u k_1 u},$$

где

$$k_1 = \left(k_0^{-1} + \frac{1}{N_0}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{k_0}{N_0}\right)^{-1} k_0 \qquad \text{(XI)}$$

– ядро, удовлетворяющее уравнению $\left(1 + \frac{k_0}{N_0}\right) k_1 = k_0$, т. е.

$$k_1(t', t'') + \frac{1}{N_0} \int_0^T k_0(t' - t)\, k_1(t, t'')\, dt = k_0(t' - t'')$$

$$(0 < t, t' < T). \qquad \text{(XII)}$$

Когда интервал $0 < t < T$ можно заменить бесконечным $-\infty < t < \infty$ (при $T \gg \tau_a$), равнение (XII) решается методом преобразования Фурье. Поскольку в спектральном редставлении k_0, k_1 есть $\frac{1}{2} S_0(\omega)$, $\frac{1}{2} S_1(\omega)$, из (XI) получаем (18).

ЛИТЕРАТУРА

Р. Л. Стратонович, Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 11, 1751.

Р. Л. Стратонович, Оптимальные нелинейные системы, осуществляющие выделение сигнала с постоянными параметрами из шума, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 6, 892.

Ю. Б. Черняк, Обнаружение сигнала с неизвестной частотой и произвольной начальной фазой на фоне белого шума, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 3, 366.

Д. В. Агеев, Я. Р. Родионов, ЧМ-радиоприем со следящей настройкой, ГЭИ, 1958.

P. Bello, Joint estimation of delay, Doppler and Doppler rate, IRE Trans., 1960 **IT-6**, 3, 330.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28 IV 1960

СПЕКТР КОЛЕБАНИЯ, ЧАСТОТА КОТОРОГО ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ НУЛЬ

М. И. Дорман

Исследованы особенности спектра колебания, частота которого изменяется по линейному закону. Основное внимание уделяется случаям прохождения частоты колебания через нулевое значение. На основе спектрального подхода выявлен характер воздействия такого колебания на избирательную систему.

Анализу частотно-модулированного колебания и его воздействия на линейные системы посвящена обширная литература (общеизвестны работы И. С. Гоноровского, А. А. Харкевича и др.).

При рассмотрении различных конкретных задач обычно исходят из предположения, что изменение мгновенной частоты колебания всегда происходит на интервале, значительно удаленном от нуля *. Однако во многих практически важных случаях, в частности при гетеродинировании частотно-модулированных сигналов, частота колебания может проходить через нулевое значение. На своеобразный характер и ряд особенностей подобных процессов указано в одной из работ И. С. Гоноровского [1], а затем в статье [2].

Настоящее исследование имеет целью более полно осветить некоторые свойства частотно-модулированного сигнала.

Рассмотрим простейшее частотно-модулированное колебание

$$u(t) = U_0 \cos \int \Omega(t)\, dt \qquad (1)$$

с постоянной амплитудой U_0 и мгновенной частотой $\Omega(t)$, изменяющейся на интервале $[-T/2, T/2]$ по закону

$$\Omega(t) = \Omega_0 + 2\beta t \qquad (2)$$

или по закону

$$\Omega(t) = \Omega_0 + 2\beta |t|, \qquad (3)$$

где $\Omega_0 = \text{const}$; $\beta = \Delta\omega_д / T$; $\Delta\omega_д$ — отклонение частоты за время $T/2$ (см. рис. 1).

Напряжение $u(t)$ может быть получено в результате перемножения (гетеродинирования) двух колебаний с последующим выделением разностной составляющей. Определим деформацию спектра колебания при изменении параметров Ω_0 и $\Delta\omega_д$ для обоих законов изменения частоты (2) и (3).

Если $\Omega(t)$ определяется равенством (2), то

$$u(t) = U_0 \cos(\beta t^2 + \Omega_0 t + \Phi_0), \qquad (4)$$

где Φ_0 — начальная фаза колебания при $t = 0$.

Спектр рассматриваемого колебания

$$G(\omega) = U_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\beta t^2 + \Omega_0 t + \Phi_0)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

* Отступления от такого рода ограничений приводили иногда к недоразумениям (см. статью С. М. Хлытчиева [4] и связанную с ней дискуссию [5]).

можно выразить через интегралы Френеля

$$S(x)=\int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt \quad \text{и} \quad C(x)=\int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt,$$

а именно:

$$G(\omega)=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\left\{e^{i\psi_1}\left[C\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+C\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]+\right.$$
$$+e^{-i\psi_2}\left[C\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+C\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]+$$
$$+ie^{i\psi_1}\left[S\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+S\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]-$$
$$\left.-ie^{-i\psi_2}\left[S\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+S\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]\right\}, \qquad (5)$$

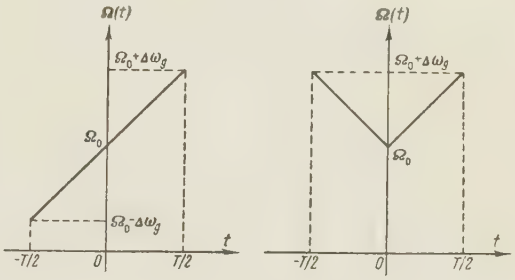


Рис. 1. Закон изменения частоты колебания

где

$$\psi_1=\Phi_0-\frac{(\Omega_0-\omega)^2}{4\beta};$$
$$\psi_2=\Phi_0-\frac{(\Omega_0+\omega)^2}{4\beta}.$$

Прежде всего рассмотрим случай, когда

$$\Omega_0 \gg \Delta\omega_д > 0.$$

При этом для $\omega > 0$

$$C\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+C\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\simeq 0,$$
$$S\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+S\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\simeq 0,$$

для $\omega < 0$

$$C\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+|\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+C\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-|\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\simeq 0,$$
$$S\left(\frac{\Delta\omega_д+\Omega_0+|\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)+S\left(\frac{\Delta\omega_д-\Omega_0-|\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\simeq 0.$$

Учитывая это, легко показать, что модуль спектральной плотности

$$|G(\omega)|\simeq\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\sqrt{C_1^2+S_1^2}, \qquad (6)$$

а фаза

$$\Theta(\omega) \simeq \operatorname{arc\,tg} \frac{S_1 + C_1 \operatorname{tg}\left[\Phi_0 - \frac{(\Omega_0 - |\omega|)^2}{4\beta}\right]}{C_1 - S_1 \operatorname{tg}\left[\Phi_0 - \frac{(\Omega_0 - |\omega|)^2}{4\beta}\right]},$$

где

$$S_1 = S\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + S\left(\frac{\Delta\omega_д - \Omega_0 + |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right),$$

$$C_1 = C\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + C\left(\frac{\Delta\omega_д - \Omega_0 + |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right).$$

Заметим, что $|G(\omega)|$ не зависит от начальной фазы колебания Φ_0 и при конечных величинах ω не может иметь нулевых значений.

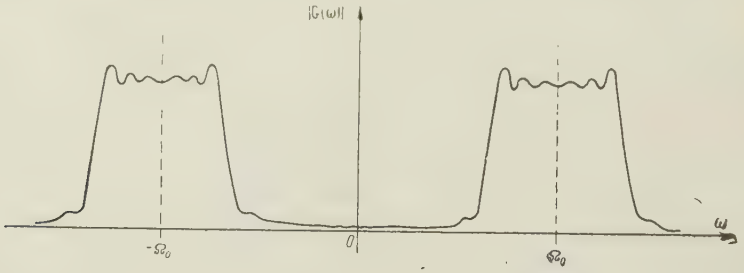


Рис. 2. Спектр частотно-модулированного колебания при $\Delta\omega_д \ll \Omega_0$

В силу нечетности интегралов Френеля, очевидно,

$$\lim_{|\omega|\to\infty} |G(\omega)| = 0.$$

Кроме того, при больших скоростях изменения частоты ($\Delta\omega_д/\sqrt{2\pi\beta} \ll 1$) спектральная плотность вблизи нулевой частоты оказывается весьма незначительной. Отметим еще симметричность функции $|G(\omega)|$ относительно частоты $\omega = \Omega_0$ (см. рис. 2). Действительно, нетрудно убедиться, что

$$G\left[\pm(\Omega_0 \pm \Delta\omega_д)\right] = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\sqrt{C^2\left(\Delta\omega_д\sqrt{\frac{2}{\pi\beta}}\right) + S^2\left(\Delta\omega_д\sqrt{\frac{2}{\pi\beta}}\right)}.$$

Если $\Delta\omega_д \to \infty$, то из (5) следует (см. рис. 3)

$$|G(\omega)| = U_0\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left|\cos\left(\frac{\Omega_0^2 + \omega^2}{4\beta} - \Phi_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right|. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что с увеличением $\Delta\omega_д$* огибающая становится все более равномерной, а спектральная плотность проходит через минимальные (нулевые) значения на частотах

$$\omega_k = \sqrt{\beta\left[\pi(4k+3) + 4\Phi_0\right] - \Omega_0^2},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Важной особенностью спектра (7) является его зависимость от начальной фазы Φ_0 при любых скоростях изменения частоты.

Возвратимся к исходным соотношениям (5) и (6). С уменьшением Ω_0 оба «горба» спектральной функции, расположенные в области положительных и отрицательных частот, сближаются. При $\Omega_0 < \Delta\omega_д$ мгновенная частота $\Omega(t)$ проходит через нулевое значение, т. е. образуются «ну-

* При постоянной скорости изменения частоты это означает увеличение длительности колебания.

левые биения». Когда $\Omega_0 = 0$, частота $\Omega(t)$ представляет собой нечетную функцию времени [2], а спектральная плотность нулевых биений равна

$$G(\omega) = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \left\{ \cos\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \Phi_0\right) \left[C\left(\frac{\Delta\omega_д + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + C\left(\frac{\Delta\omega_д - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \Phi_0\right) \left[S\left(\frac{\Delta\omega_д + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + S\left(\frac{\Delta\omega_д - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Очевидно, и в этом случае $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} G(\omega) = 0$, а

$$G(0) = U_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \left[\cos\Phi_0 C\left(\frac{\Delta\omega_д}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - \sin\Phi_0 S\left(\frac{\Delta\omega_д}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right]. \quad (9)$$

С увеличением частотного отклонения $\Delta\omega_д$ спектр $G(\omega)$ своей формой все больше напоминает исходное колебание (1). Действительно, если в (7) или (8) положить $\Delta\omega_д \to \infty$, то легко видеть, что

$$G(\omega) = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \Phi_0 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (10)$$

Рассмотрим спектр колебания, частота которого представляет собой четную функцию времени (3). В этом случае

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\beta t^2 - \Omega_0 t - \Phi_0), & -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant 0, \\ U_0 \cos(\beta t^2 + \Omega_0 t + \Phi_0), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Искомый спектр $G(\omega)$ также выразим через интегралы Френеля:

$$G(\omega) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \left\{ (e^{i\varphi_1} + e^{-i\psi_2}) \left[C\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - C\left(\frac{\Omega_0 + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] + \right.$$
$$+ (e^{-i\varphi_2} + e^{i\psi_1}) \left[C\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - C\left(\frac{\Omega_0 - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] +$$
$$+ i(e^{i\varphi_1} - e^{-i\psi_2}) \left[S\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - S\left(\frac{\Omega_0 + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] -$$
$$\left. - i(e^{-i\varphi_2} - e^{i\psi_1}) \left[S\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - S\left(\frac{\Omega_0 - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) \right] \right\}, \quad (11)$$

где $\varphi_1 = -\Phi_0 - \frac{(\Omega_0 + \omega)^2}{4\beta}$; $\varphi_2 = -\Phi_0 - \frac{(\Omega_0 - \omega)^2}{4\beta}$. Можно показать, что при $\Phi_0 = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ равенство (11) совпадает с (5). Если $\Omega_0 \gg \Delta\omega_д > 0$, то

$$|G(\omega)| = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \sqrt{C_2^2 \cos^2 \frac{(\Omega_0 - |\omega|)^2}{4\beta} + S_2^2 \sin^2 \frac{(\Omega_0 - |\omega|)^2}{4\beta}}, \quad (12)$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \dfrac{C_2 \operatorname{tg}\Phi_0 + S_2 \operatorname{tg}\dfrac{(\Omega_0 - \omega)^2}{4\beta}}{C_2 - S_2 \operatorname{tg}\Phi_0 \operatorname{tg}\dfrac{(\Omega_0 - \omega)^2}{4\beta}}, & \omega \geqslant 0, \\ \dfrac{S_2 \operatorname{tg}\dfrac{(\Phi_0 - |\omega|)^2}{4\beta} - C_2 \operatorname{tg}\Phi_0}{C_2 + S_2 \operatorname{tg}\Phi_0 \operatorname{tg}\dfrac{(\Omega_0 - |\omega|)^2}{4\beta}}, & \omega \leqslant 0, \end{cases}$$

где

$$S_2 = S\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - S\left(\frac{\Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right);$$

$$C_2 = C\left(\frac{\Delta\omega_д + \Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) - C\left(\frac{\Omega_0 - |\omega|}{\sqrt{2\pi\beta}}\right).$$

Не останавливаясь здесь на особенностях спектра (11), заметим только, что модуль $|G(\omega)|$ также не зависит от начальной фазы колебания Φ_0. Определенный интерес представляет случай, когда $\Omega_0 \to 0$ и образуются нулевые биения с четным законом изменения частоты $\Omega(t)$ [2]. Полагая в (11) $\Omega_0 = 0$, получаем спектр нулевых биений

$$G(\omega) = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \left\{ e^{-i\Phi_0} \left[\cos\frac{\omega^2}{4\beta} C\left(\frac{\Delta\omega_д + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + \sin\frac{\omega^2}{4\beta} S\left(\frac{\Delta\omega_д + \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right] + \right.$$
$$+ e^{i\Phi_0}\left[\cos\frac{\omega^2}{4\beta} C\left(\frac{\Delta\omega_д - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + \sin\frac{\omega^2}{4\beta} S\left(\frac{\Delta\omega_д - \omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right] +$$
$$\left. + 2i\sin\Phi_0\left[\cos\frac{\omega^2}{4\beta} C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + \sin\frac{\omega^2}{4\beta} S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]\right\}, \qquad (13)$$

зависящий, от начальной фазы Φ_0. Нетрудно видеть, например, что

$$G(0) = U_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \cos\Phi_0 C\left(\frac{\Delta\omega_д}{\sqrt{2\pi\beta}}\right). \qquad (14)$$

При $\Phi_0 = k\pi$ (14), как и следовало ожидать, совпадает с (9). Найдем, наконец, спектральную плотность при $\Delta\omega_д \to \infty$:

$$|G(\omega)| = U_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sqrt{\cos^2\Phi_0 \cos^2\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \frac{\pi}{4}\right) + \to \ldots}$$
$$\ldots \to \sqrt{+ 2\sin^2\Phi_0\left[\cos\frac{\omega^2}{4\beta} C\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) + \sin\frac{\omega^2}{4\beta} S\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi\beta}}\right)\right]^2}. \qquad (15)$$

Интересно заметить, что вблизи нулевой частоты

$$|G(\omega)| \simeq U_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left|\cos\Phi_0 \cos\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

а при $\omega \to \infty$

$$|G(\omega)| \simeq U_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left|\cos\left(\frac{\omega^2}{4\beta} - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Следовательно, сильная зависимость спектральной плотности от начальной фазы в этом случае имеет место лишь на сравнительно низких частотах.

Выясним особенности воздействия частотно-модулированного колебания на избирательную систему. Зададим частотную характеристику $K(\omega)$ в виде прямоугольника (см. рис. 4):

$$K(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega - \omega_0| < \Delta\omega_0,\ \Delta\omega_0 > 0, \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases}$$

где $2\Delta\omega_0$ — полоса прозрачности системы; ω_0 — центральная частота полосы.

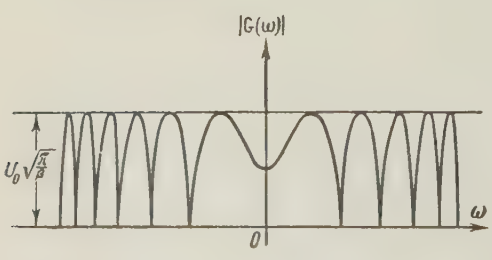


Рис. 3. Спектр частотно-модулированного колебания при $\Delta\omega_д \to \infty$

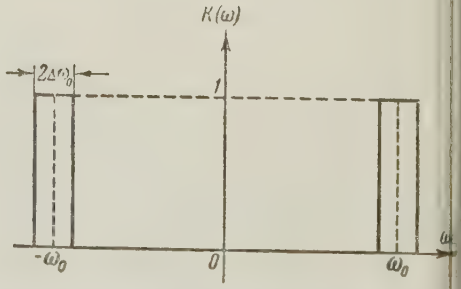


Рис. 4. Частотная характеристика избирательной системы

Найдем энергию E, выделяемую колебанием на выходе системы, в случае, когда частотное отклонение $\Delta\omega_д$ достаточно велико (7). В соответствии с теоремой Релея

$$E = \frac{U_0^2}{\beta}\int_{\omega_0-\Delta\omega_0}^{\omega_0+\Delta\omega_0}\cos^2\left(\frac{\Omega_0^2+\omega^2}{4\beta}-\Phi_0-\frac{\pi}{4}\right)d\omega.$$

Опуская выкладки, приведем окончательное выражение для энергии:

$$E = \frac{U_0^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\left\{\frac{2\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}+\cos\left(\frac{\Omega_0^2}{2\beta}-2\Phi_0\right)\left[S\left(\frac{\omega_0+\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)-S\left(\frac{\omega_0-\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\Omega_0^2}{2\beta}-2\Phi_0\right)\left[C\left(\frac{\omega_0+\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)-C\left(\frac{\omega_0-\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)\right]\right\}. \qquad (16)$$

Отсюда видно, что энергия на выходе при заданной амплитуде на входе зависит не только от скорости изменения частоты колебания и полосы пропускания системы, но также от начальной фазы и от расположения полосы прозрачности на оси частот. Лишь в случае, когда $\omega_0 \gg \sqrt{\pi\beta}$, и $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$,

$$E \simeq \frac{\Delta\omega_0 U_0^2}{\beta}, \qquad (17)$$

т. е. энергия не зависит ни от начальной фазы, ни от величины ω_0.

Рассмотрим другой предельный случай. Пусть $\omega_0 \simeq 0$ (фильтр нижних частот), а $\Delta\omega_0/\sqrt{\pi\beta} \ll 1$. Тогда, ограничившись первыми членами ряда Тейлора, для $S\left(\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)$ и $C\left(\frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\pi\beta}}\right)$ [3] получаем

$$E \simeq \frac{\Delta\omega_0 U_0^2}{\beta}\left[1+\sin\left(\frac{\Omega_0^2}{2\beta}-2\Phi_0\right)\right]. \qquad (18)$$

В этом случае энергия отклика оказывается в сильной зависимости от Φ_0, Ω_0 и конечно от ω_0 и $\Delta\omega_0/\sqrt{\pi\beta}$.

Рассмотрение других частных случаев приводит к аналогичным результатам.

Из вышеизложенного следует, что в ряде случаев для нахождения отклика избирательной системы необходимо принимать во внимание не только вид огибающей, но и «тонкую структуру» воздействия, в частности характер изменения его фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Гоноровский, О воздействии эдс с быстроизменяющейся частотой на инерционные системы, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 6, 902.
2. М. И. Дорман, Особенности колебательных явлений при прохождении частоты через нуль, Радиотехника, 1960, 15, 10, 27.
3. Таблицы интегралов Френеля, Изд. АН СССР, 1958.
4. С. М. Хлытчиев, Воздействие напряжения с линейно-изменяющейся частотой на линейные системы, Радиотехника, 1956, 11, 1, 61.
5. В. А. Корнеева, В. С. Понкратов, Радиотехника, 1959, 14, 4, 76.

Поступила в редакцию
17 X 1960

МАРКОВСКИЙ ХАРАКТЕР ОГИБАЮЩЕЙ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

В. И. Тихонов

Получено дифференциальное уравнение для огибающей квазигармонических флуктуаций на выходе колебательного контура с большой добротностью, когда на вход контура действует широкополосный шум. Из уравнения следует, что огибающая представляет процесс Маркова. Решена задача о первом времени достижения огибающей некоторого уровня.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось несколько заметок [1, 2, 3], в которых при помощи разных аргументов обосновано то положение, что огибающая квазигармонических флуктуаций, возникающих на выходе колебательного контура с большой добротностью при воздействии на контур белого шума, представляет марковский процесс.

В основной работе [1] показано, что огибающая флуктуаций на выходе колебательного контура представляет процесс без последействия, и многомерные плотности вероятности для огибающей выражаются через одномерное начальное распределение и вероятность перехода. Отсюда следует марковский характер огибающей [4, 5].

В заметке [2] при помощи перехода от декартовых координат к полярным указан путь получения уравнения Фоккера—Планка для огибающей и нахождения вероятности перехода. В этой же заметке высказаны сомнения относительно возможности практического использования результата работы [1] и предложены другие способы обоснования марковского характера огибающей. В связи с этим между авторами возникла дискуссия [3] в основном методического характера, не подвергающая сомнению тот результат, что огибающая флуктуаций на выходе контура представляет процесс Маркова.

Хотя это положение можно считать установленным, настоящая статья посвящена аналогичному вопросу. Дело в том, что марковский характер огибающей можно продуктивно использовать для решения ряда задач, представляющих физический и практический интерес. Например, для марковских процессов в ряде случаев удается до конца решить задачу о первом времени достижения огибающей определенного уровня, что позволяет своеобразным методом рассмотреть задачу о воздействии огибающей квазигармонических флуктуаций на «пороговые» устройства (электронные реле, триггеры и др.) [6]. Для процессов Маркова в принципе можно также решать задачу о вычислении вероятности того, что случайный процесс пересекает фиксированный уровень в течение определенного промежутка времени заданное число раз [7], что непосредственно связано с вычислением вероятности ложной тревоги в теории помехоустойчивости.

В дальнейшем будет получено уравнение Фоккера—Планка для одномерной плотности вероятности огибающей двумя способами. Первый из них, кратко указанный в заметке [2], состоит в том, что в уравнении Фокера—Планка, записанном в прямоугольных координатах фазовой плоскости, делается переход к полярным координатам. Таким путем удается сразу получить соответствующее уравнение Фоккера—Планка для огибающей.

Однако в данной статье основное внимание уделено второму способу, торый, обладая той же степенью математической строгости, является зически более наглядным. Он заключается в том, что сначала находит- дифференциальное уравнение для огибающей квазигармонических уктуаций в колебательном контуре, а затем составляется уравнение оккера — Планка для одномерной плотности вероятности.

В работе приведено стационарное решение уравнения Фоккера— ланка, а также вычислено среднее время первого достижения огибающей которого фиксированного значения

Представляется, что помимо количественных результатов некоторые ложения статьи могут представить методический интерес (например, числение корреляции между случайной фазой и воздействующими уктуациями). Аналогичные вопросы встречаются и в других задачах апример, при рассмотрении влияния флуктуаций на работу автогенера- ра) [8, 9].

1. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ

Пусть флуктуационный ток $\xi(t)$ воздействует на колебательный контур LC. В дальнейшем будем предполагать, что случайная функция $\xi(t)$ едставляет нормальный стационарный случайный процесс нулевым едним зачением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau), \tag{1}$$

σ^2 — дисперсия. Спектральная плотность $\xi(t)$ считается приближенно зномерной в пределах амплитудно-частотной характеристики контура. этому $\xi(t)$ можно рассматривать как белый шум с функцией корреляции

$$k(\tau) = N_0\delta(\tau), \qquad N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} k_\xi(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

$\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Для тока $\eta(t)$ в индуктивной ветви колебательного контура имеем дующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\eta} + 2\alpha\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = \omega_0^2\xi(t), \tag{3}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \qquad \alpha = \frac{R}{2L}. \tag{4}$$

едположим, что колебательный контур обладает большой добротностью

$$Q = \frac{\omega_0 L}{LC} = \frac{\omega_0}{2\alpha} \gg 1. \tag{5}$$

Введем в уравнение (3) новые переменные

$$x = \eta\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$y = \eta\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\dot{\eta}}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{6}$$

φ_0 — случайная начальная фаза, статистически не зависимая от $\xi(t)$.

Обратные соотношения имеют вид

$$\eta = x\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + y\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\frac{\dot{\eta}}{\omega_0} = -x\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + y\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{7}$$

Как следует из соотношений (6), координаты x, y изображающей точки фазовой плоскости должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\dot{x} = -\frac{\sin(\omega_0 t + \varphi_0)}{\omega_0}(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta), \qquad \dot{y} = \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{\omega_0}(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta).$$

Используя (3) и (7), получим

$$\dot{x} = -\alpha x - \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi^0)\,\xi(t) + \alpha x \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) + \alpha y \sin 2(\omega_0 t + \varphi_0),$$
$$\dot{y} = -\alpha y + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,\xi(t) + \alpha x \sin 2(\omega_0 t + \varphi_0) - \alpha y \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Учитывая селективные свойства контура (5) и пренебрегая поэтому членами, содержащими высокочастотные множители (частоты $2\omega_0$), можно написать

$$\dot{x} = -\alpha x - \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,\xi(t), \qquad \dot{y} = -\alpha y + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,\xi(t). \tag{8}$$

В более общем случае эти уравнения могут иметь следующий вид:

$$\dot{x} = X(x, y) + \xi_1(t), \qquad \dot{y} = Y(x, y) + \xi_2(t). \tag{9}$$

Соответствующее уравнение Фоккера — Планка для них записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Xw) - \frac{\partial}{\partial y}(Yw) + \frac{1}{2}N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

При этом предполагается, что случайные функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, имеющие нулевое среднее значение, можно рассматривать как дельта-коррелированные с одинаковым коэффициентом интенсивности N при дельта-функциях, т. е. если

$$k_1(\tau) = \langle \xi_1(t)\,\xi_1(t+\tau)\rangle, \qquad k_2(\tau) = \langle \xi_2(t)\,\xi_2(t+\tau)\rangle, \tag{11}$$

то можно положить

$$k_1(\tau) = k_2(\tau) = N\delta(\tau),$$
$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_1(t)\,\xi_1(t+\tau)\rangle\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_2(t)\,\xi_2(t+\tau)\rangle\, d\tau. \tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем косые скобки обозначают статистическое усреднение.

Введем потенциальную функцию $U(x, y)$ при помощи соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -X, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -Y.$$

Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка (10), удовлетворяющее естественному условию исчезновения плотности вероятности на бесконечности, как легко убедиться непосредственной подстановкой, запишется в виде

$$w(x, y) = C \exp\left[-\frac{2}{N}U(x, y)\right], \tag{13}$$

где C — нормировочный множитель.

Применительно к нашему частному случаю (8) будем иметь

$$X = -\alpha x, \qquad Y = -\alpha y, \qquad U(x, y) = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2),$$
$$\xi_1(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,\xi(t), \qquad \xi_2(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,\xi(t),$$
$$w(x, y) = \frac{\alpha}{\pi N} \exp\left[-\frac{\alpha}{N}(x^2 + y^2)\right]. \tag{14}$$

Кстати, если перейти к полярным координатам

$$x = A\cos\varphi, \qquad y = A\sin\varphi \tag{15}$$

и воспользоваться известным соотношением

$$w(x, y)\,dx\,dy = W(A, \varphi)\,AdAd\varphi,$$

из формулы (14) получим для огибающей A релеевский закон

$$W(A) = \frac{2\alpha}{N} A \exp\left(-\frac{\alpha}{N} A^2\right). \tag{16}$$

Найдем коэффициент интенсивности N для рассматриваемого примера. ри этом необходимо учитывать, что обе случайные функции $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ ражаются через случайную функцию $\xi(t)$ и содержат случайную на-льную фазу φ_0, не зависящую от $\xi(t)$. Поэтому при вычислении стати-ических характеристик нужно сначала производить усреднение по ан-мблю реализаций $\xi(t)$, а затем по случайной начальной фазе φ_0 [10]. оследнее усреднение, в отличие от первого, будем обозначать индексом Находим

$$\langle \xi_1(t) \rangle = -\omega_0 \langle \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \rangle_{\varphi_0} \langle \xi(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi_2(t) \rangle = \omega_0 \langle \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \rangle_{\varphi_0} \langle \xi(t) \rangle = 0,$$

$$k_1(\tau) = \langle\langle \xi_1(t)\, \xi_1(t+\tau) \rangle\rangle_{\varphi_0} = \frac{1}{2} \omega_0^2 k_\xi(\tau) \cos\omega_0\tau,$$

$$k_2(\tau) = \langle\langle \xi_2(t)\, \xi_2(t+\tau) \rangle\rangle_{\varphi_0} = \frac{1}{2} \omega_0^2 k_\xi(\tau) \cos\omega_0\tau,$$

$$= \frac{1}{2}\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} k_\xi(\tau) \cos\omega_0\tau\, d\tau = \omega_0^2 \int_0^{\infty} k_\xi(\tau) \cos\omega_0\tau\, d\tau = \frac{1}{4}\omega_0^2 S(f_0), \tag{17}$$

е $S(f_0)$ — физически измеряемая спектральная плотность флуктуаций $t)$ при частоте f_0.

Применительно к интересующему нас случаю (8) уравнение Фоккера — ланка (10) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\alpha w + \alpha\left(x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{18}$$

ерейдем в этом уравнении к полярным координатам (15). Получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha w + \frac{\partial}{\partial A}(\alpha A w) + \frac{1}{2}\frac{N}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}\frac{N}{A}\frac{\partial}{\partial A}\left(A \frac{\partial w}{\partial A}\right). \tag{19}$$

Найдем уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности оги-ающей A. Уравнение (19) нужно решать при некоторых начальных зна-ениях A_0 и φ_0. При этом начальная фаза φ_0 может принимать любые ачения из интервала $-\pi \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$. Поскольку колебательный кон-р обладает положительным затуханием $\alpha > 0$, то физически ясно, что лжна существовать стационарная плотность вероятности огибающей, зависящая от начальных значений A_0 и φ_0.

Следовательно, при любом значении φ_0 должно получаться одно и то е стационарное распределение для огибающей A. Поэтому стационарная отность вероятности для огибающей вообще не должна зависеть от φ, при нахождении уравнения для этой плотности можно третий член в авой части уравнения (19) положить равным нулю:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha w + \frac{\partial}{\partial A}(\alpha A w) + \frac{1}{2}\frac{N}{A}\frac{\partial}{\partial A}\left(A \frac{\partial w}{\partial A}\right). \tag{20}$$

Заметим также, что если в уравнении (18) функция $w(x, y)$ дает плот-сть вероятности в прямоугольных координатах x, y, то в уравнении (20) нкция w не дает плотности вероятности для огибающей. Функция $x, y)$ характеризует вероятность, сосредоточенную на элементарной пло-адке $dxdy$ в окрестности точки (x, y), а плотность вероятности огибающей (A) должна характеризовать вероятность, сосредоточенную в соответ-вующем кольце толщиной dA. Поэтому

$$W(A) = 2\pi A w(x, y). \tag{21}$$

Переходя в уравнении (20) от функции u к W, получаем окончательно уравнение Фоккера—Планка для огибающей

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial A}\left[\left(\alpha A - \frac{N}{2A}\right)W\right] + \frac{1}{2}N\frac{\partial^2 W}{\partial A^2}. \qquad (22)$$

Стационарное решение этого уравнения, как нетрудно убедиться, дается формулой (16).

Итак, огибающая квазигармонических флуктуаций на выходе колебательного контура с большой добротностью удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка (22) и, следовательно, представляет процесс Маркова.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОГИБАЮЩЕЙ

Получим дифференциальное уравнение для огибающей. При сделанных ранее предположениях относительно колебательного контура (большая добротность) и флуктуаций $\xi(t)$ (равномерный спектр) флуктуационный ток $\eta(t)$ можно представить в виде квазигармонического колебания

$$\eta(t) = A(t)\cos\psi(t), \qquad \psi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \varphi(t), \qquad (23)$$

где огибающая $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ — случайные функции времени, медленные по сравнению с $\cos\omega_0 t$; φ_0 — случайная начальная фаза, статистически не зависящая от $\xi(t)$. Огибающую и фазу доопределим известным соотношением [11]

$$\dot{\eta}(t) = -\omega_0 A(t)\sin\psi(t). \qquad (24)$$

Из соотношений (23) и (24) получаем формулы для огибающей и фазы

$$A = \left(\eta^2 + \frac{\dot{\eta}^2}{\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \varphi = -\varphi_0 - \omega_0 t - \operatorname{arc\,tg}\frac{\dot{\eta}}{\omega_0\eta}. \qquad (25)$$

Дифференцируя эти равенства, получим

$$\dot{A} = \frac{\dot{\eta}}{\omega_0^2 A}(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta), \quad \dot{\varphi} = -\frac{\eta}{\omega_0 A^2}(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta).$$

Воспользовавшись уравнением (3), а затем соотношениями (23) и (24), можем написать

$$\left.\begin{aligned}\dot{A} &= -\alpha A(1 - \cos 2\psi) - \omega_0 \sin\psi\xi(t),\\ \dot{\varphi} &= -\alpha\sin 2\psi - \frac{\omega_0}{A}\cos\psi\xi(t).\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Перейдем обычным способом от точных уравнений (26) к укороченным (приближенным) уравнениям. Для этого при наличии случайных воздействий нужно отбросить лишь члены, содержащие высокочастотные множители (частоты $2\omega_0$) [12]. Получим

$$\left.\begin{aligned}\dot{A} &= -\alpha A - \omega_0\sin\psi(t)\,\xi(t),\\ \dot{\varphi} &= -\frac{\omega_0}{A}\cos\psi(t)\,\xi(t).\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Обозначим

$$\zeta(t) = -\sin\psi(t)\,\xi(t). \qquad (28)$$

Найдем среднее значение и функцию корреляции для $\zeta(t)$. При вычислении этих и других статистических характеристик $\zeta(t)$ следует иметь в виду, что фаза $\varphi(t)$ статистически зависит от случайной функции $\xi(t)$. Это видно хотя бы из второго уравнения (27). В выражение для приращения фазы за некоторый промежуток времени Δ входит случайная функ-

ия $\xi(t)$:

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t-\Delta) = -\omega_0 \int_{t-\Delta}^{t} \frac{1}{A(s)} \cos[\varphi_0 + \omega_0 s + \varphi(s)]\, \xi(s)\, ds =$$

$$= -\omega_0 \int_{-\Delta}^{0} \frac{\xi(t+x)}{A(t+x)} \cos[\varphi_0 + \omega_0 t + \omega_0 x + \varphi(t+x)]\, dx. \qquad (29)$$

Для вычисления указанных выше характеристик воспользуемся исходными предпосылками. Так как по предположению время корреляции флуктуаций $\xi(t)$ много меньше постоянной времени $\tau_c \simeq 1/\alpha$ колебательного контура (которая характеризует скорость изменения огибающей и фазы φ), то можно взять такой сдвиг по времени Δ, чтобы значения случайных функций $\xi(t-\Delta)$ и $\xi(t)$ были некоррелированными и чтобы огибающая и фаза не успевали за это время Δ существенно измениться. Иначе говоря, выберем такое $\Delta > 0$, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\tau_к \ll \Delta \ll \tau_c. \qquad (30)$$

При этом приближенно будут выполняться соотношения

$$A(t-\Delta) \simeq A(t), \quad \varphi(t-\Delta) \simeq \varphi(t), \qquad (31)$$

так что приращение фазы $\Delta\varphi$ является достаточно малым.

Заметим, что величины $A(t-\Delta)$ и $\varphi(t-\Delta)$, получающиеся в результате интегрирования случайной функции $\xi(t)$ с некоторым весом за «прошедший» промежуток времени, статистически не зависимы от «будущих» значений $\xi(t)$. Такое утверждение неверно, если рассматривать случайные величины $A(t+\Delta)$, $\varphi(t+\Delta)$ и $\xi(t)$. В этом можно убедиться на примере последовательной цепочки RC. Если на такую цепочку воздействует шум $\xi(t)$ с функцией корреляции

$$k(\tau) = N_0 \delta(\tau),$$

то функция корреляции между напряжением $\eta(t-\Delta)$ на емкости и шумом $\xi(t)$ равна

$$\langle \eta(t-\Delta)\, \xi(t) \rangle = \alpha N_0 e^{-\alpha(t-\Delta)} \int_{-\infty}^{t-\Delta} e^{\alpha x} \delta(t-x)\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } \Delta \geqslant 0, \\ \alpha N_0 e^{-\alpha\Delta} & \text{при } \Delta < 0 \end{cases} \quad \left(\alpha = \frac{1}{RC}\right).$$

С учетом равенств (31) выражение (29) можно записать так:

$$\Delta\varphi = -\frac{\omega_0}{A(t)} \int_{-\Delta}^{0} \cos[\varphi_0 + \omega_0 t + \omega_0 x + \varphi(t)]\, \xi(t+x)\, dx. \qquad (32)$$

Ввиду малости величины $\Delta\varphi$ случайную функцию $\zeta(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\zeta(t) = -\xi(t) \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta) + \Delta\varphi] = -\xi(t) \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta)] - \xi(t)\, \Delta\varphi \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta)]. \qquad (33)$$

Среднее значение этой функции равно

$$\langle \zeta(t) \rangle = -\langle\langle \xi(t)\, \Delta\varphi \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta)] \rangle\rangle_{\varphi_0}. \qquad (34)$$

Воспользовавшись выражением (32), можем написать

$$\langle\zeta(t)\rangle = \frac{\omega_0}{A(t)} \int_{-\Delta}^{0} \langle\langle \xi(t)\,\xi(t+x)\cos[\omega_0 t + \omega_0 x + \varphi_0 + \varphi(t)]\cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta)]\rangle\rangle_{\varphi_0} dx = \frac{\omega_0}{2A}\int_{-\Delta}^{0} \Big\langle\!\Big\langle \xi(t)\,\xi(t+x)\Big[\cos(\omega_0 x + \Delta\varphi) + \cos 2\Big(\omega_0 t + \frac{1}{2}\omega_0 x + \varphi_0 + \varphi(t)\Big)\Big]\Big\rangle\!\Big\rangle_{\varphi_0} dx =$$

$$= \frac{\omega_0}{2A}\int_{-\Delta}^{0} \langle\langle \xi(t)\,\xi(t+x)\cos(\omega_0 x + \Delta\varphi)\rangle\rangle_{\varphi_0} dx =$$

$$= \frac{\omega_0}{2A}\int_{-\Delta}^{0} \{k_\xi(x)\cos\omega_0 x - \langle\langle \xi(t)\,\xi(t+x)\,\Delta\varphi\rangle\rangle_{\varphi_0}\}\sin\omega_0 x\,dx.$$

Для нормальных процессов все многомерные моменты нечетного порядка равны нулю и, следовательно,

$$\langle\xi(t_1)\,\xi(t_2)\,\xi(t_3)\rangle = 0. \tag{35}$$

Поэтому

$$\langle\zeta(t)\rangle = \frac{\omega_0}{2A}\int_{-\Delta}^{0} k_\xi(x)\cos\omega_0 x\,dx = \frac{\omega_0}{2A}\int_{-\infty}^{0} k_\xi(\tau)\cos\omega_0\tau\,d\tau = \frac{\omega_0}{8A} S(f_0). \tag{36}$$

Второе равенство написано на том основании, что при $\Delta \gg \tau_к$ выполняется соотношение $k_\xi(\Delta) = 0$ и, следовательно, нижний предел интегрирования можно положить равным $-\infty$.

Найдем теперь функцию корреляции случайного процесса $\zeta(t)$, определенного формулой (33). Пусть

$$\zeta_0(t) = \zeta(t) - \langle\zeta(t)\rangle. \tag{37}$$

Для функции корреляции можем написать

$$k_0(\tau) = \langle\zeta(t)\,\zeta(t+\tau)\rangle - \langle\zeta(t)\rangle\langle\zeta(t+\tau)\rangle,$$

$$\langle\zeta(t)\,\zeta(t+\tau)\rangle = \langle\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta)) \times \sin(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_0 + \varphi(t+\tau-\Delta))\rangle\rangle_{\varphi_0} +$$

$$+ \langle\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\,\Delta\varphi\sin(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_0 + \varphi(t+\tau-\Delta))\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta))\rangle\rangle_{\varphi_0} + \langle\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\,\Delta\varphi_\tau\sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta))\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_0 + \varphi(t+\tau-\Delta))\rangle\rangle_{\varphi_0} + \langle\langle\xi(t)\,\xi(t+\tau)\,\Delta\varphi\Delta\varphi_\tau\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta))\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_0 + \varphi(t+\tau-\Delta))\rangle\rangle_{\varphi_0},$$

$$\langle\zeta(t)\rangle\langle\zeta(t+\tau)\rangle = \frac{\omega_0^2}{A^2}\int_{-\Delta}^{0}\int_{-\Delta}^{0} \langle\langle\xi(t)\,\xi(t+x)\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t-\Delta))\cos(\omega_0 t + \omega_0 x + \varphi_0 + \varphi(t))\rangle\rangle_{\varphi_0} \times \langle\langle\xi(t+\tau)\,\xi(t+\tau+y)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_0 + \varphi(t+\tau-\Delta))\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \omega_0 y + \varphi_0 + \varphi(t+\tau))\rangle\rangle_{\varphi_0} dx\,dy.$$

Естественно, что нас интересуют значения $\tau \leqslant \tau_к$, где $k_\xi(\tau) \neq 0$. Можно убедиться, что при $\tau > \tau_к$ все члены в этих выражениях обращаются

нуль. Но для малых значений τ ($\tau \ll \Delta$) можно положить

$$\varphi(t+\tau-\Delta) \simeq \varphi(t-\Delta) \simeq \varphi(t).$$

ри этом гармонические множители в выражении для $\langle \zeta(t)\,\zeta(t-\tau)\rangle$ ожно считать не зависящими от чистофлуктуационных, что позволяет роизводить усреднение по $\xi(t)$ и по случайной начальной фазе φ_0 раздельно. Используя затем выражение (32) и формулу (35), убеждаемся, го второе и третье слагаемые в правой части равны нулю.

Если выполнить необходимые вычисления, которые из-за громоздкости здесь не приводятся, то получим следующий приближенный езультат:

$$k_0(\tau) = \frac{1}{2} k_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau. \tag{38}$$

Итак, с учетом формул (36) и (37) укороченное уравнение для огибающей (27) можно записать в следующем окончательном виде:

$$\dot{A} = -\alpha A + \frac{c}{2A} + \omega_0 \xi_0(t), \tag{39}$$

де случайная функция $\zeta_0(t)$ имеет корреляционную функцию (38), а

$$c = \frac{1}{4} \omega_0^2 S(f_0). \tag{40}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Как известно [13, 14], при выполнении неравенства (30), т. е. при $\gg \tau_к$, случайный процесс $A(t)$, определенный уравнением (39), можно ассматривать как марковский и, следовательно, к нему можно применять равнение Фоккера — Планка. Применительно к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\dot{y} = F(y, \xi(t))$$

равнение Фоккера — Планка для плотности вероятности имеет вид

$$\dot{W} = -\frac{\partial}{\partial y}\{[K_1(y) + K'(y)]\,W\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[K_2(y)\,W]. \tag{41}$$

десь

$$K_1(y) = \langle F(y, \xi)\rangle; \quad K_2(y) = 2\int\limits_{-\infty}^{0} k(F, F_\tau)\,d\tau; \quad K'(y) = \int\limits_{-\infty}^{0} k\left(\frac{\partial F}{\partial y}, F_\tau\right) d\tau;$$

од $k(F, F_\tau)$ и $k\left(\frac{\partial F}{\partial y}, F_\tau\right)$ понимаются функции корреляции аргументов.

Одномерная плотность вероятности в стационарном состоянии представляет собой решение уравнения (41) при $\dot{W} = 0$. Нетрудно показать, го она определяется формулой

$$W(y) = \frac{C}{K_2(y)} \exp\left[2\int \frac{K_1(y)}{K_2(y)}\,dy\right], \tag{42}$$

де коэффициент C определяется из условия нормировки плотности вероятности.

Применяя эти соотношения к интересующему нас уравнению (39), айдем

$$K_1(A) = -\alpha A + \frac{c}{2A}, \quad K'(y) = 0,$$

$$K_2(A) = 2\omega_0^2 \int\limits_{-\infty}^{0} k_0(\tau)\,d\tau = \omega_0^2 \int\limits_{0}^{\infty} k(\tau)\cos\omega_0\tau\,d\tau = \frac{1}{4}\omega_0^2 S(f_0) = c. \tag{43}$$

оэтому на основании формулы (42) получим

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \geqslant 0, \tag{44}$$

где $$\sigma^2 = \frac{c}{2\alpha} = \frac{1}{4} Q\omega_0 S(f_0). \quad (45)$$

Таким образом, одномерная стационарная плотность вероятности для огибающей квазигармонических флуктуаций, возникающих в результате воздействия широкополосного шума на узкополосный колебательный контур, является релеевской. Этот результат можно было ожидать заранее.

Известно [15], что двумерная плотность вероятности для огибающей имеет вид

$$W_2(A, A_\tau) = \frac{AA_\tau}{\sigma^4(1-\rho^2)} I_0\left(\frac{AA_\tau}{\sigma^2}\frac{\rho}{1-\rho^2}\right)\exp\left[-\frac{A^2+A_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right], \quad \rho = e^{-\alpha|\tau|}. \quad (46)$$

Из марковского характера огибающей следует, что плотности вероятности (44) и (46) полностью описывают огибающую как стационарный случайный процесс, так как определяют вероятность перехода

$$p_2(A_\tau, A) = \frac{W_2(A, A_\tau)}{W(A)} = \frac{A_\tau}{\sigma^2(1-\rho^2)} I_0\left(\frac{AA_\tau}{\sigma^2}\frac{\rho}{1-\rho^2}\right)\exp\left[-\frac{A^2\rho^2+A_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]. \quad (47)$$

4. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ

Пусть огибающая $A(t)$ в некоторый начальный момент времени t_0 принимает определенное значение $A(t_0) = A_0$, находящееся внутри интервала (a, b), где $a \geqslant 0$. Рассмотрим время $\tau = t - t_0$, по истечении которого функция $A(t)$ в первый раз достигнет граничных значений либо a, либо b. Для каждой реализации это время будет разным.

Как известно [13, 16], среднее время $M = \langle\tau\rangle$, по истечении которого достигается либо граница a, либо граница b, определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{1}{2} K_2(A_0)\frac{d^2M}{dA_0^2} + K_1(A_0)\frac{dM}{dA_0} = -1 \quad (48)$$

с граничными условиями

$$M(a) = 0, \quad M(b) = 0. \quad (49)$$

Здесь $K_1(A_0)$ и $K_2(A_0)$ определяются соотношениями (43), в которых нужно заменить A на A_0. Подставив эти значения в уравнение (48), получим

$$\frac{1}{2} c\frac{d^2M}{dA_0^2} + \left(-\alpha A_0 + \frac{c}{2A_0}\right)\frac{dM}{dA_0} + 1 = 0. \quad (50)$$

Найдем среднее время M_b, по истечении которого огибающая $A(t)$, имеющая при t_0 значение A_0, достигнет в первый раз значения $b > A_0$. Применительно к данному случаю среднее время достижения «верхней» границы, как нетрудно убедиться проверкой, определяется формулой

$$M_b(A_0) = \int_{A_0}^{b}\left\{\int_0^x \frac{2}{K_2(y)} e^{\varphi(y)}\,dy\right\} e^{-\varphi(x)}\,dx, \quad (51)$$

где $$\varphi(y) = 2\int \frac{K_1(y)}{K_2(y)}\,dy.$$

Подставив в эти соотношения выражения для K_1 и K_2 из (43) и выполнив интегрирование, получим

$$M_b(A_0) = \int_{A_0}^{b}\left(e^{\frac{\alpha}{c}x^2} - 1\right)\frac{dx}{\alpha x} = \frac{1}{2\alpha}\int_{\frac{\alpha}{c}A_0^2}^{\frac{\alpha}{c}b^2}(e^z - 1)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left[\mathrm{Ei}\left(\frac{b^2}{2\sigma^2}\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) - 2\ln\frac{b}{A_0}\right], \quad (52)$$

где

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} e^t \frac{dt}{t}$$

— интегральная показательная функция [17].

Полученное решение (52) удовлетворяет следующим условиям: $M_{A_0}(A_0) = M_b(b) = 0$, $M_b(A_0) \geqslant 0$ и растет с увеличением b и уменьшением $A_0 \geqslant 0$. Эти условия следуют из смысла задачи.

Вычислим теперь среднее время M_a, по истечении которого огибающая $A(t)$, имеющая при t_0 значение A_0, достигнет в первый раз значения $a < A_0$. В данном случае среднее время достижения «нижней» границы будет определяться формулой

$$M_a(A_0) = \int_a^{A_0} \left\{ \int_x^{\infty} \frac{2}{K_2(y)} e^{\varphi(y)}\, dy \right\} e^{-\varphi(x)}\, dx. \tag{51a}$$

Выполнив вычисления, получим

$$M_a(A_0) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A_0}{a}. \tag{52a}$$

Нетрудно убедиться, что полученное решение удовлетворяет основному уравнению (48) и граничным условиям $M_{A_0}(A_0) = M_a(a) = 0$, $M_a(A_0) \geqslant 0$ и растет с увеличением A_0 и уменьшением a. Можно показать, что для дисперсии времени достижения границы справедливо уравнение, подобное (48).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. Pierce, A Markoff envelope process, IRE Trans., 1958, **IT-4**, 4, 163.
2. C. W. Helstrom, C. T. Isley, Two notes on a Markoff envelope process, IRE Trans., 1959, **IT-5**, 3, 139.
3. J. N. Pierce, C. T. Isley, Futher comments on a Markoff envelope process, IRE Trans., 1959, **IT-5**, 4, 186.
4. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, 1954.
5. M. C. Wang, G. E. Uhlenbeck, On the theory of the Brownian motion, Rev. of Mod. Phys., 1954, **17**, 2—3, 323.
6. М. И. Подгорецкий, О числе ложных импульсов, Докл. АН СССР, 1952, **82**, 6, 881.
7. C. W. Helstrom, The distribution on the number of crossings of gaussian stochastic process, IRE Trans., 1957, **IT-3**, 4, 232.
8. С. М. Рытов, Флуктуации в автоколебательных системах томсоновского типа, ЖЭТФ, 1955, **29**, 3, 304.
9. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, О преобразовании флуктуаций амплитуды и фазы автоколебаний резонансными системами, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 1, 28.
10. В. И. Тихонов, Когда нестационарный случайный процесс можно заменять стационарным, ЖТФ, 1956, **26**, 9, 2057.
11. В. И. Тихонов, Один способ определения огибающей квазигармонических флуктуаций, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 4, 502.
12. И. Л. Берштейн, Флуктуации амплитуды и фазы лампового генератора, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1950, **14**, 2, 145.
13. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, О статическом рассмотрении динамических систем, Сб. трудов А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1956, 142.
14. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Обобщение уравнения Фоккера — Планка, ЖЭТФ, 1954, **26**, 2, 187.
15. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.
16. A. J. F. Siegert, On the first passage time probability function, Phys. Rev., 1951, **81**, 617.
17. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, ГТИ, 1948.

Поступила в редакцию
24 X 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 7

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

И. Х. Ризкин

Относительно характеристик нелинейного элемента, входящего в делитель частоты синусоидальных колебаний, установлены условия, выполнение которых обеспечивает существование или отсутствие субгармонического режима.

ВВЕДЕНИЕ

Интересно установить условия, которым должен удовлетворять нелинейный элемент колебательной цепи, чтобы в ней заведомо существовал или, наоборот, заведомо отсутствовал режим деления частоты синусоидальных колебаний. Влияние параметров, определяемых линейной частью схемы (например, потерь и расстройки), на условия существования субгармонического режима достаточно хорошо изучено.

Важность отыскания упомянутых условий с теоретической точки зрения очевидна. Стоит, однако, заметить, что соответствующие результаты могут оказаться полезными и в чисто практическом отношении. Прежде всего, их можно эффективно использовать при создании схем с «синтезированной» нелинейностью, т. е. со специально сконструированным нелинейным элементом, характеристика которого позволяет удовлетворить некоторым заранее указанным требованиям. В качестве одного из таких требований можно выставить, например, условие получения определенной полосы деления при заданном коэффициенте деления частоты. Нам известна лишь одна попытка такого рода [1]; возможности этого метода далеко не исчерпаны.

С другой стороны, знание условий, о которых идет речь, может быть полезным и в применении к известным схемам делителей (оптимальный выбор нелинейного элемента и его режима, выбор соответствующей аппроксимации при анализе и расчете и т. д.). Что касется условий отсутствия режима деления частоты, то их можно использовать как в тех случаях, когда важно подавить всякие субгармонические колебания (например, в некоторых цепях со сталью), так и в делителях частоты, когда важно предотвратить появление колебаний поделенной частоты с коэффициентом деления, отличным от заданного.

Полное решение сформулированной задачи для сложных нелинейных цепей затруднительно. Нижеследующее изложение ограничивается рассмотрением двух практически важных случаев: условий существования режима деления в синхронизированном автогенераторе и условий отсутствия субгармонического режима в довольно общей схеме; в обоих случаях речь идет о системе с одной степенью свободы.

1. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЖИМА ДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ — ДЕЛИТЕЛЕ ЧАСТОТЫ

1. Для деления частоты синусоидальных колебаний часто используются простые автогенераторы томсоновского типа, синхронизированные на субгармонике воздействия. Возможность получения режима деления частоты и требование широкой полосы синхронизации накладывают определенные условия на характеристику нелинейного элемента, входящего

в состав автогенератора — делителя. Свойства этого элемента удобно характеризовать спектором на его выходе при синусоидальном воздействии на входе (например, спектром анодного тока лампы при синусоидальном напряжении на сетке). Хорошо известно, что при делении в n раз существенную роль играют особенности характеристики, обусловливающие n-ю гармонику выходного спектра; они определяют как самую возможность деления, так и ширину полосы синхронизации (см., например, [2—6]).

Однако, насколько нам известно, не было дано более или менее строгого доказательства того факта, что наличия n-й гармоники в спектре нелинейного элемента возбужденного автогенератора достаточно для деления частоты. В [4] такое условие рассматривается как необходимое, а в [5] оно хотя и фигурирует как достаточное, но никакого доказательства этого факта не приведено; отмечено лишь, что в отсутствие n-й гармоники соответствующие составляющие средней крутизны обращаются в нуль. В этом параграфе, во-первых, мы приводим упомянутое доказательство; во-вторых, устанавливаем требования к фазе n-й гармоники, обусловленные условиями устойчивости. Кроме того, показано, что в отсутствие n-й гармоники ее роль может играть 2 n-я гармоника производной от характеристики нелинейного элемента.

Отметим, что уже после написания настоящей работы выяснилось, что по крайней мере, в части, относящейся к n-й гармонике, указанный результат можно получить, рассматривая приближенные укороченные уравнения для амплитуды и фазы, сформулированные в работе [6] (уравнения (2. 7) и (2. 8). Хотя в этой статье, имеющей гораздо более общий характер, соответствующий вывод автором не сформулирован, ясно, что при достаточно малых расстройках уравнение для фазы имеет стационарное решение, а недифференциальное уравнение для амплитуды также допускает стационарную амплитуду. Из условия устойчивости вытекает требование к знаку параметра синхронизации β; последний пропорционален амплитуде n-й гармоники.

Поскольку, как уже было сказано, возможность деления связана не только с n-й гармоникой автоколебаний и анализ вопроса в [6] не проведен, мы сочли возможным воспроизвести все рассмотрение.

2. Ограничимся рассмотрением простейших автогенераторов-делителей, описываемых известным уравнением

$$\ddot{x} + x = \mu\varphi(\dot{x}) + \mu\xi x + \lambda_0 \sin n\tau, \tag{1}$$

где $\varphi(\dot{x})$ — интересующая нас нелинейная характеристика; ξ — расстройка; $0 < \mu \ll 1$ — малый параметр. Напомним, что условия существования стационарного субгармонического режима

$$x = x_0 + \mu\ldots = u \sin\tau - v\cos\tau + \frac{\lambda_0}{1-n^2}\sin n\tau + \mu\ldots$$

требуют наличия не равных одновременно нулю вещественных корней u_0 и v_0 в уравнениях

$$U = 0, \tag{2}$$

$$V = 0, \tag{3}$$

где U и V — синусоидальная и косинусоидальная составляющие первой гармоники функции $f(u\cos\tau + v\sin\tau + q\cos n\tau)$; $q = n\lambda_0/(1-n^2)$. Кроме того, требуется, чтобы при $u = u_0$, $v = v_0$ выполнялись условия устойчивости [7]

$$\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} < 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} > 0. \tag{5}$$

Чтобы упростить рассмотрение, будем считать расстройку ξ и амплитуду внешнего воздействия λ_0 малыми; поскольку нас интересует лишь принципиальная воможность деления, это предположение не уменьшает общности, необходимо лишь, чтобы режим деления частоты существовал в конечной (хотя бы и сколь угодно малой) области амплитуд и расстроек. Заметим, что практически указанные параметры связаны с нестабильностью амплитуды и частоты воздействия и частоты генератора, так что соответствующие области стремятся сделать возможно большими.

3. Пусть в отсутствие воздействия выполнены следующие условия: при вещественном $M = M_0$ имеем

$$F(M_0) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(M_0 \cos\tau)\cos\tau d\tau = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial M_0} < 0. \tag{7}$$

Тогда в системе (1) существует устойчивый автоколебательный процесс — она является автогенератором *. Если теперь подвергнуть автогенератор малому синхронизирующему воздействию, то энергетический баланс схемы изменится незначительно; следовательно, могут быть выполнены условия (2) — (3) в неавтономной системе.

В самом деле, положим в соответствии со сказанным выше величину расстройки малой, порядка μ ($\xi = \mu\xi_0$) и учтем, что U и V вычисляются при $\mu = 0$, так что расстройка из соответствующих выражений выпадает; заметим далее, что в силу четности $\varphi(\dot{x}_0)$, как функции времени при $v = 0$, один из корней может быть нулем: $v_0 = 0$; величина u_0 находится из уравнения (3):

$$R(u, q) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\cos\tau d\tau = 0. \tag{8}$$

Если $\varphi(\dot{x})$ непрерывна вместе со своей производной, то

$$R(u, q) = R(u, 0) + O(q). \tag{9}$$

Но из (7) — (8) следует, что $R(u, 0)$ меняет знак при $u = M_0$; следовательно, при достаточно малых параметрах воздействия $|q|$ также и $R(u, q)$ будет менять знак в том же направлении, а амплитуда субгармоники u_0 будет мало отличаться от амплитуды автоколебаний M_0.

4. Рассмотрим условия устойчивости колебаний поделенной частоты. Непосредственным вычислением легко установить, что при $v_0 = 0$ производные $\partial U/\partial u$ и $\partial V/\partial v$ обращаются в нуль; тогда условия устойчивости (4) — (5) сводятся к отрицательности двух остальных производных. Но из соотношений (7) — (9) следует, что при $u = u_0$, $v = v_0$

$$\frac{\partial V}{\partial u} < 0,$$

если воздействие мало. Таким образом, остается установить, когда отрицательно $\partial U/\partial v$. Оказывается, что это условие и накладывает ограничения на n-ю гармонику спектра $\varphi(u_0\cos\tau)$.

Очевидно, что при $u = u_0$, $v = v_0 = 0$ имеем

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(\dot{x}_0)\sin^2\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\sin^2\tau\, d\tau,$$

* Предполагается, что квадрат круговой частоты линеаризованной автономной системы, т. е. системы (1) при $\lambda_0 = 0$, отличается от единицы на величину порядка μ^2. Это предположение оправдано тем, что ниже рассматриваются лишь расстройки порядка μ.

де штрих символизирует дифференцирование по $\dot{x}$. Перепишем это соотношение в форме

$$\frac{U}{v} = \frac{1}{\pi u_0}\int_0^{2\pi}\varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\,[u_0\sin\tau + nq\sin n\tau - nq\sin n\tau]\sin\tau\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\pi u_0}\int_0^{2\pi}\varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\,[-u_0\sin\tau - nq\sin n\tau]\sin\tau\,d\tau -$$

$$-\frac{nq}{\pi u_0}\int_0^{2\pi}\varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\sin n\tau\sin\tau\,d\tau$$

вычислим первый интеграл по частям; тогда

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{\pi u_0}\int_0^{2\pi}\varphi(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\cos\tau\,d\tau -$$

$$-\frac{nq}{\pi u_0}\int_0^{2\pi}\varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau)\sin n\tau\sin\tau\,d\tau.$$

ервый из двух интегралов равен нулю в силу (3). Замечая, что

$$\varphi'(u_0\cos\tau + q\cos n\tau) = \varphi'(u_0\cos\tau) + o(q)$$

вычисляя второй интеграл, окончательно получим

$$\left.\frac{\partial U}{\partial v}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0=0}} = \frac{n^2|q|}{\pi u_0^2}\int_0^{2\pi}\varphi(u_0\cos\tau)\cos n\tau\,d\tau + o(q^2). \qquad (10)$$

Таким образом, условия устойчивости при достаточно малых $|q|$ бу-т выполнены, если амплитуда n-й гармоники в спектре $\varphi(u\cos\tau)$ будет рицательна в некоторой окрестности амплитуды свободных автоколе-аний (напомним, что $u_0 \simeq M_0$).

5. Если n-я гармоника спектра $\varphi(u\cos\tau)$ тождественно равна улю, то, учитывая в соотношении (10) члены порядка q^2, найдем

$$\left.\frac{\partial U}{\partial v}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=0}} = -\frac{n^2q^2}{\pi u_0^2}\int_0^{2\pi}\varphi'(u_0\cos\tau)\cos 2n\tau d\tau + O(q^3),$$

условия устойчивости опять-таки можно выполнить. Теперь амплитуда n-й гармоники производной от характеристики $\varphi(\dot{x})$ должна быть положительной в окрестности амплитуды автоколебаний.

Разумеется, сколь угодно малые гармоники всех номеров практически егда присутствуют в интересующих нас спектрах, так что, казалось бы, ление частоты всегда возможно. Поскольку, однако, полосы синхрони-ции при малых гармониках тоже малые, в реальной системе субгармони-ский процесс оказывается невозможным, если только величина гармо-ической составляющей с определенным номером меньше некоторой кри-ической величины (определяемой, в частности, нестабильностью частоты тогенератора). Все это, однако, не умаляет важности принципиальных зультатов, полученных в упомянутых выше работах и частично дока-нных и уточненных выше.

6. Заметим, что полученные результаты не основывались ни на ап-роксимации нелинейной функции автогенератора, ни даже на возмож-сти ее разложения в ряд; достаточно лишь наличия и непрерывности скольких первых производных (это обстоятельство относится и к [6]).

Необходимо подчеркнуть, что полученный выше результат, вообще говоря, несправедлив в случае неавтоколебательной системы. Например, в [7] показано, что в недовозбужденной системе с кубической характеристикой деление частоты в 3 раза невозможно. Поэтому установление достаточных для деления частоты условий требует в случае неавтоколебательной системы специального исследования.

Существенная роль определенных гармоник спектра $\varphi(u\cos\tau)$ объясняется тем, что ответственные за эти гармоники особенности характеристик порождают комбинационные составляющие спектра $\varphi(u\cos\tau + q\cos n\tau)$, которые и поддерживают процесс деления в n раз. В следующем параграфе показано, что в отсутствие n-й и $(2n+1)$-й гармоник спектра $\varphi(u\cos\tau)$ деление невозможно и дано физическое объяснение этого факта.

2. УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ РЕЖИМА ДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ

1. Известно, что при использовании томсоновских цепей подавление периодического субгармонического режима возможно при увеличении потерь и расстройки. Нас будут интересовать условия, связанные не с этими величинами, а с видом нелинейных характеристик схемы. В этом плане вопрос об отсутствии субгармонических режимов, насколько нам известно, специально не рассматривался. В ряде работ, например [2, 4], получены, однако, важные результаты, из которых можно сделать некоторые выводы. В частности, Королев, рассматривая в [4] более простую систему, нежели наша, получил выражения, из которых вытекает результат, являющийся частным случаем полученного ниже. В настоящей работе исследована система более общего вида, чем в [2, 4], и применен несколько отличный от принятого метод.

2. Многие практически важные схемы, в которых наблюдаются субгармонические режимы при синусоидальном воздействии, описываются квазилинейным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + x = \mu[\psi(x)\dot{x} + f(x)] + \lambda_0 \sin n\tau. \tag{11}$$

Здесь ψ и f для простоты — аналитические функции; $0 < \mu \ll 1$ — малый параметр. При $f(x) = \xi x$, где ξ — расстройка, получаем известное уравнение системы с нелинейными потерями, рассмотренное в предыдущем параграфе для автоколебательного случая; когда обе функции нелинейны, (11) описывает большое число схем с одним нелинейным элементом [8].

Ограничим рассмотрение цепями, характеризуемыми уравнением (11), и установим условия, при которых невозможен субгармонический процесс.

3. При физическом анализе процессов деления частоты оказывается плодотворным следующее представление: гармонический делитель есть совокупность взаимосвязанных активного преобразователя частоты и колебательной системы, настроенной на частоту, близкую к субгармонике. В качестве первого могут выступать разнообразные схемы, например балансный ламповый модулятор, диодный преобразователь с усилителем, нелинейная реактивность, переменная линейная реактивность и т. д. Ко входу преобразователя подводятся колебания делимой частоты и колебания, формируемые колебательной системой. Субгармонический режим поддерживается в колебательной системе за счет энергии источника внешнего воздействия или постоянного источника питания или их обоих. Во всех случаях «каналом», по которому энергия поступает в колебательную систему, являются колебания некоторой комбинационной частоты, возникающие в преобразователе; комбинационные частоты составлены из частоты собственных колебаний системы и частоты воздействия. Именно эти комбинационные составляющие и делают возможным при некоторых условиях существование стационарного субгармонического режима.

Естественно ожидать, что если этот «комбинационный механизм» ет разрушен, процесс деления частоты окажется невозможным. Про- е формальное рассмотрение, приводимое ниже, подтверждает это. Комбинационные частоты, порождаемые нелинейными элементами, дящими в схему, и могущие поддержать субгармонические колебания говой частоты, равной единице, при наличии воздействия с круговой тотой n (см. (11)) должны, очевидно, удовлетворять уравнению

$$|pn - q| = 1,$$

$p, q = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, порядок комбинации $p + q$ равен $+ 1) \pm 1$; иначе говоря,

$$p + q = n + 2j \tag{12а}$$

или

$$p + q = 2n + 1 + 2j, \tag{12б}$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$.

В соответствии со сказанным выше потребуем, чтобы нелинейные рактеристики $f(x)$ и $\Psi(x) = \int \psi(x)\, dx$ не допускали бы возникновения бинационных частот указанного порядка *. Легко сообразить, что утствие комбинационных частот порядка (12) при бигармоническом действии равносильно отсутствию n-й и $(2n + 1)$-й гармоник в ктре f и Ψ при синусоидальном воздействии. Поэтому мы можем по- бовать, чтобы функции $f(A \cos \tau)$ и $\Psi(A \cos \tau)$ ни при какой амплитуде е содержали бы составляющих круговой частоты n и $2n + 1$.

Покажем, что при этом условии можно гарантировать отсутствие про- са деления частоты в n раз.

4. Рассчитаем синусную (U) и косинусную (V) составляющие первой моники функции $\psi(x_0)\, \dot{x}_0 + f(x_0)$, где

$$x_0 = A \sin(\tau + \theta) + q_0 \sin n\tau = u \sin \tau - v \cos \tau + q_0 \sin n\tau;$$

$= \lambda_0 / (1 - n^2)$; x_0 — как и в предыдущем параграфе, «нулевое» прибли- ие субгармонических колебаний в методе малого параметра, который ользован ниже.

Вычисляя по частям интегралы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi [A \sin(\tau + \theta) + q_0 \sin n\tau] [A \cos(\tau + \theta) + nq_0 \cos n\tau] \frac{\sin \tau}{\cos \tau}\, d\tau,$$

дем к соотношениям

$$\begin{aligned} U &= -U_\Psi + U_f, \\ V &= U_\Psi + V_f, \end{aligned} \tag{13}$$

$\Psi(x) = \int \psi(x)\, dx$, а величины в правых частях (13) — синусные осинусные составляющие функций $f(x_0)$ и $\Psi(x_0)$, фигурирующих в е индексов.

Легко показать, что при наложенных выше условиях имеют место ующие равенства:

$$\begin{aligned} U_f &= B_f \cos \theta, \quad U_\Psi = B_\Psi \cos \theta, \\ V_f &= B_f \sin \theta, \quad V_\Psi = B_\Psi \sin \theta. \end{aligned} \tag{14}$$

* Соображения, по которым вместо $\psi(x)$ рассматривается ее интеграл, станут позже (см. (13)).

Здесь

$$B_f = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^{2r+1} q_0^{2s}}{2^{2(r+s)}\,(r+1)!\,r!\,(s!)^2} \frac{d^{2(r+s)+1}}{dz_0^{2(r+s)+1}} f(z_0); \tag{15}$$

суммирование ведется по всем r и s — таким, что соответствующие производные не равны нулю; z_0 символизирует «рабочую точку» характеристики $f(x)$. Выражение для B_Ψ получается заменой в (15) f на Ψ.

Результат (15) автоматически получается из известных соотношений в [9], которые позволяют рассчитать амплитуду первой гармоники на выходе нелинейного элемента при бигармоническом воздействии; расчет упрощается тем, что комбинационные составляющие, приводящие к появлению первой гармоники, отсутствуют.

5. Подставляя (14) в (13) и приравнивая U и V нулю в соответствии с (2) и (3), найдем

$$\begin{aligned} -B_\Psi \sin\theta + B_f \cos\theta = 0, \\ B_\Psi \cos\theta + B_f \sin\theta = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\theta = -1.$$

Поэтому уравнения (16) при указанных в п. 3 условиях не имеют вещественных корней, требуемых теорией деления [7]. Такие корни существуют лишь в том случае, когда амплитуда $A = A_0$ удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\begin{aligned} B_f = 0, \\ B_\Psi = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Однако можно показать, что в этом случае не выполняется условие устойчивости (5), так как при $u = u_0$, $v = v_0$ получается

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = 0. \tag{18}$$

В самом деле, непосредственный подсчет показывает, что

$$-A \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(A, \theta)}. \tag{19}$$

Но из уравнений (16) следует, что стоящая в правой части (19) величина равна $B_\Psi B'_\Psi + B_f B'_f$ (штрих означает дифференцирование по A). Поэтому корням уравнений (17) соответствует неустойчивый режим деления, характеризуемый равенством (18). На языке «укороченных» переменных u и v мы можем сказать, что особая точка (u_0, v_0) оказывается негрубой *.

6. Таким образом, если в спектре функций $f(A\cos\tau)$ и $\Psi(A\cos\tau)$ при всех амплитудах A отсутствуют n-я и $(2n+1)$-я гармоники, то в нелинейной схеме, описываемой уравнением (11), не могут существовать устойчивые стационарные периодические колебания частоты, которая в n раз меньше входной. Если n — нечетное число, то из тождества нулю n-й гармоники вытекает и тождество нулю $(2n+1)$-й. Если же коэффициент деления четный, то соответствующий спектр ограничен, причем номер последней отличной от нуля гармоники не больше $2n-1$.

* Строго говоря, приведенные выше соображения указывают лишь на невозможность существования субгармонического решения в нулевом приближении; физически это означает, что в системе не могут существовать интенсивные колебания поделенной частоты (которым в силу их интенсивности нельзя было бы приписать малый множитель μ). Однако соображения п. 3 указывают, по-видимому, на общий характер полученного результата.

Существенно отметить, что отсутствия n-й гармоники спектра еще недостаточно; можно показать на примерах, что в системе с отсутствующей n-й и присутствующей $(2n+1)$-й гармониками возможно деление в n раз. Заметим, что описанный в [10] эксперимент также, по-видимому, подтверждает этот вывод.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. L. Hughes, Proc. I. R. E., 1953, **41**, 2, 241.
2. В. И. Сифоров, Радиотехника, 1946, **1**, 5, 3.
3. О. А. Тхоржевский, Б. К. Шембель, ЖТФ, 1947, **17**, 2, 215.
4. П. Г. Королев, Тр. ВКИАС, 1956, 53, 172.
5. П. Г. Королев, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 2, 262.
6. Р. В. Хохлов, Вестн. Моск. ун-та, 1954, 8, 51.
7. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 1932, **2**, 7—8, 775.
8. M. P. Zlatev, S. L. Farchy, Onde électr., 1957, **37**, 369, 1104.
9. И. В. Басик, Метод определения компонент тока при воздействии на нелинейную систему суммы синусоидальных напряжений, Сб. научных трудов ЦНИИС МС, 1948.
10. K. Schlichting, Z. angew. Phys., 1957, **9**, 9, 458.

Поступила в редакцию
14 IX 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 7

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РЕФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. И. Иванчиков

Рассмотрен вопрос о частотной зависимости углов прихода при распространении электромагнитных волн в плоско-слоистых неоднородных средах. Установлено соотношение между углами прихода в виде обобщенного закона преломления (закона Снеллиуса). Приведены примеры определения функции относительной рефракции (ошибки) для случая линейного ε-профиля и ε-профиля переходного слоя типа Эпштейна.

Как известно, при лучевой трактовке явления рефракции электромагнитных волн определение углов прихода и углов рефракции основано на использовании закона преломления.

В связи с тем, что критерий применимости геометрической оптики не предопределяет степени близости результатов лучевой и волновой теорий, ценность предвычислений указанных углов в приближении геометрической оптики можно определить только после сопоставления с результатами опыта.

Естественно возникает вопрос, насколько существенна для практических целей не учитываемая лучевой теорией зависимость углов прихода (а значит и углов рефракции) от длины распространяющейся волны и как априори ее учесть?

На основе физических представлений можно лишь ожидать тем более ярко выраженного явления рефракции, чем значительнее изменение фазовой скорости волнового процесса на фронте в длину волны. Явление рефракции электромагнитных волн, таким образом, должно определяться не просто характером оптической неоднородности среды и углом входа луча в эту среду, а радиоволновыми параметрами, определяющими ее эффективную толщину в длинах волн и величину перепада показателя преломления на фронте в длину волны.

В рефракционном отношении в связи этим как случай распространения весьма коротких волн в крупномасштабной неоднородности, так и случай распространения сверхдлинных волн при наличии локальной неоднородности равноценен. Как в первом, так и во втором случае явление рефракции не может быть столь рельефно выраженным, как этого следует ожидать в неоднородностях, имеющих эффективные толщины, сравнимые с длиной волны.

Явление сверхрефракции, обусловливающее волноводные условия распространения, можно, по-видимому, рассматривать как пример чередования «избирательной рефракции» и отражения.

Как показал В. А. Фок, в случае приземного волновода, заданного гиперболическим профилем (для приведенного показателя преломления), «дальность горизонта» зависит не только от параметров слоя, определяющих особенность перехода показателя преломления через минимум, но и является логарифмической функцией от отношения этих параметров к длине волны [1].

В настоящей работе на основе волновых представлений рассмотрен вопрос об определении углов прихода дальности горизонта и относительной рефракции электромагнитных волн при их распространении в плоско-

слоистых неоднородных средах. Пусть решение волнового уравнения *

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0, \tag{1}$$

определяющее особенности распространения электромагнитной волны в слоисто-неоднородной среде, имеет вид

$$E(x, z) = E_0 e^{ik_0 px + i\varphi(z)}, \tag{2}$$

где

$$\varphi(z) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} Z(z)}{\operatorname{Re} Z(z)}; \tag{3}$$

$Z(z) = Z_0 e^{i\varphi(z)}$ — интеграл уравнения

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_0^2 [\varepsilon(z) - p^2] Z = 0; \tag{4}$$

$$p = \sqrt{\varepsilon_0} \sin \vartheta_0;$$

ϑ_0 — угол прихода (падения) на «границу» смыкания однородной и неоднородной сред.

Определим в произвольно взятой точке $P = (x, z)$ угол прихода электромагнитной волны $\vartheta(z)$, для чего воспользуемся тем, что фазовый фронт волны задан уравнением

$$\Phi(x, z) = k_0 px + \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} Z(z)}{\operatorname{Re} Z(z)} = \text{const}, \tag{5}$$

вследствие чего

$$\operatorname{tg} \vartheta(z) = -\left(\frac{dz}{dx}\right)_{P(x, z)} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{k_0 p}{\frac{1}{|Z_0|^2} \begin{vmatrix} A(z), & B(z) \\ \frac{\partial A}{\partial z}, & \frac{\partial B}{\partial z} \end{vmatrix}}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \operatorname{Re} Z(z), \\ B(z) &= \operatorname{Im} Z(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Введем в рассмотрение функцию $\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)$ при помощи соотношения

$$\frac{1}{|Z_0|^2} \begin{vmatrix} A(z), & B(z) \\ \frac{\partial A}{\partial z}, & \frac{\partial B}{\partial z} \end{vmatrix} = k_0 \sqrt{\varepsilon(z) - p^2} [1 + \Theta(z)]; \tag{8}$$

тогда

$$\operatorname{tg} \vartheta(z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \sin \vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon_0 \sin^2 \vartheta_0} \left[1 + \Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)\right]} \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{[\varepsilon(z) - \varepsilon_0 \sin^2 \vartheta_0] \left[1 + \Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)\right]^2 + \varepsilon_0 \sin^2 \vartheta_0 \sin \vartheta(z)} = \sqrt{\varepsilon_0} \sin \vartheta_0. \tag{10}$$

Как видно, при распространении плоской электромагнитной волны в плоско-слоистой неоднородной среде между углами прихода ϑ_0 и $\vartheta(z)$

* Заметим, что уравнение (1) справедливо для горизонтальной поляризации волн. При вертикальной поляризации вместо $\varepsilon(z)$ будет входить более сложная функция, включающая кроме диэлектрической проницаемости ее логарифмический градиент. Для общности под $\varepsilon(z)$ можно понимать некое эффективное значение диэлектрической проницаемости.

должно выполняться более общее условие, чем условие, определяемое общеизвестным законом преломления (законом Снеллиуса),

$$\sqrt{\varepsilon(z)}\sin\vartheta(z) = \sqrt{\varepsilon_0}\sin\vartheta_0 = \text{const}. \tag{11}$$

В предельном случае, а именно в случае геометрической оптики, как это показано ниже, $\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right) \to 0$ и (10) переходит в (11).

Подкоренное выражение в (10), таким образом, можно рассматривать как выражение для эффективной диэлектрической проницаемости, вследствие чего горизонтальную «дальность распространения» можно определить как

$$x = p\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{\varepsilon_0(\zeta) - p^2}} = p\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{[1+\Theta(\zeta)]\sqrt{\varepsilon(\zeta) - p^2}}. \tag{12}$$

Если дальность, определяемую в приближении геометрической оптики, обозначить через

$$x_0 = p\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta_0}{\sqrt{\varepsilon(\zeta) - p^2}}, \tag{13}$$

то

$$x_0 - x = p\int_{z_0}^{z}\frac{\Theta(\zeta)\,d\zeta_0}{[1+\Theta(\zeta)]\sqrt{\varepsilon(\zeta) - p^2}} \tag{14}$$

будет характеризовать изменение горизонтальной дальности распространения за счет зависимости углов прихода от длины волны.

Из (10) и (12) видно, что зависимость углов прихода (а значит и углов рефракции) и горизонтальной дальности распространения от длины распространяющейся волны целиком определяется видом функции $\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)$. В принципе эта функция может быть определена для всех случаев решения дифференциального уравнения (4), указанных в [2]; что касается ее физического смысла, то его легко установить, рассматривая не сами углы прихода, а их разность

$$\gamma(z) = \pm[\vartheta_0 - \vartheta(z)]. \tag{15}$$

В самом деле,

$$\operatorname{tg}\gamma(z) = \pm\frac{\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\vartheta(z)}{1+\operatorname{tg}\vartheta_0\operatorname{tg}\vartheta(z)} = \pm\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)_p - \left(\frac{dz}{dx}\right)_0}{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)_p\left(\frac{dz}{dx}\right)_0}. \tag{16}$$

Исключив из этого соотношения $\operatorname{tg}\vartheta(z)$, при помощи (9) найдем

$$\operatorname{tg}\gamma(z) = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\sin\vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon_0\sin^2\vartheta_0}\operatorname{tg}\vartheta_0\left[1+\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)\right]}{\sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon_0\sin^2\vartheta_0}\left[1+\theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}\vartheta_0\right)\right] + \sqrt{\varepsilon_0}\sin\vartheta_0\operatorname{tg}\vartheta_0}. \tag{17}$$

При $\Theta = 0$ и $\vartheta_0 \to \pi/2$.

$$\operatorname{tg}\gamma_{0\,\text{макс}}(z) = \mp\sqrt{\frac{\varepsilon(z) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}. \tag{18}$$

При $\Theta \neq 0$ и $\vartheta_0 \to \pi/2$

$$\operatorname{tg}\gamma_{\text{макс}}(z) = \mp\sqrt{\frac{\varepsilon(z) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\left[1+\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right)\right]; \tag{19}$$

ледовательно,

$$\operatorname{tg}\gamma_{\text{макс}}(z) = \operatorname{tg}\gamma_{0\,\text{макс}}(z)\left[1 + \Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{20}$$

ля тех случаев распространения, когда

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}\gamma_{\text{макс}}(z) \simeq \gamma_{\text{макс}}(z),\\ \operatorname{tg}\gamma_{0\,\text{макс}}(z) \simeq \gamma_{0\,\text{макс}}(z),\end{gathered} \tag{21}$$

$$\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Delta\gamma(z)}{\gamma_{0\,\text{макс}}(z)}. \tag{22}$$

аким образом, $\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right)$ может быть названа функцией относительной рефракции.

В зависимости от характера ε-профиля функция относительной рефракции Θ может быть как монотонно возрастающей с увеличением длины волны, так и испытывающей экстремальные переходы при определенных соотношениях между эффективной толщиной неоднородности, длиной волны, углом падения (входа) и градиентом диэлектрической проницаемости.

Для иллюстрации приведем два примера.

1. Линейный ε-профиль. Если при

$$z < 0 \quad \varepsilon = \text{const} = \varepsilon_1,$$

$$z \geqslant 0 \quad \varepsilon(z) = \varepsilon_1 + az; \; a > 0,$$

, как известно [2], в области $z > 0$

$$Z(z) = cw^{\frac{1}{3}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(w), \tag{23}$$

де

$$w = \frac{2k_0}{3a}\sqrt{[\varepsilon(z) - p^2]^3}. \tag{24}$$

а) Когда $w \gg 1$, что соответствует случаю медленно меняющегося оказателя преломления $\left(\frac{d}{k_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varepsilon}{dz}\lambda$ — мало$\right)$ и углов ϑ_0, не слишом близких к 90°, как легко убедиться,

$$\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right) \simeq \frac{\delta}{\left(\frac{2k_0}{3a}\right)^2 [az + \varepsilon_1 \cos^2\vartheta_0]^3 + \delta^2}, \tag{25}$$

де $\delta = 0{,}07$.

б) Когда $w \ll 1$, что отвечает случаю значительных градиентов диэлектрической проницаемости и весьма малых углов скольжения, функция относительной рефракции принимает более сложный вид, а именно

$$\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right) \simeq \frac{\varkappa}{\sqrt{3}\, v\,[4v^4 - 2\varkappa v^3 + \varkappa^2]} - 1, \tag{26}$$

де

$$v = \left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{k_0}{3a}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{az + \varepsilon_1 \cos^2\vartheta_0};$$

$$\varkappa = 2\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \simeq \frac{4}{3}. \tag{27}$$

2. Переходный слой типа Эпштейна. Здесь, как известно [3],

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{e^{qz}}{1+e^{qz}}, \tag{28}$$

где $q = 4/L$; L — эффективная толщина слоя;

$$Z(z) = e^{ik_0 z\sqrt{\varepsilon_2 - p^2}} F(a-b, -a-b, 1-2b; -e^{-qz}); \tag{29}$$

$$a = i\frac{\pi}{2}\frac{L}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\vartheta_0; \quad b = i\frac{\pi}{2}\frac{L}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_2 - p^2} \text{ — параметры.}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами гипергеометрического ряда и производя вычисления согласно (8), найдем

$$\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 - p^2}{\varepsilon(z) - p^2}}\left[1 - \frac{2m}{(1+4b_0^2)e^{qz} + m^2 e^{-qz} + 2m}\right] - 1, \tag{30}$$

где

$$0 \leqslant z < \infty;$$

$$m = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \Delta\varepsilon; \tag{31}$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0;$$

$$b_0 = \frac{\pi}{2}\frac{L}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2\vartheta_0}. \tag{32}$$

Если ввести вспомогательную функцию

$$R\left(z, \frac{L}{\lambda}, \Delta\varepsilon, \vartheta_0\right) = \frac{2m}{(1+4b_0^2)e^{qz} + m^2 e^{-qz} + 2m}, \tag{33}$$

то легко убедиться в том, что при $\vartheta_0 = \pi/2$

$$m = m_{\text{экстр}} = e^{\frac{4z}{L}}, \tag{34}$$

$R\left(z, \frac{L}{\lambda}, \Delta\varepsilon, \vartheta_0\right)$ испытывает максимум.

Не останавливаясь на детальном рассмотрении всех следствий, вытекающих из приведенных примеров, укажем, что случай большого аргумента функции Ханкеля, позволивший установить частотную зависимость угла прихода в области, сопредельной геометрической оптике, наглядно иллюстрирует вырождение закона преломления (10) в общеизвестный закон Снеллиуса при $\frac{d\varepsilon}{dz}\lambda \to 0$.

Приведем численное значение относительной рефракции Θ для случая так называемой стандартной рефракции с тем, чтобы подчеркнуть ее малость по сравнению с ее значением для той же длины волны, но при условии глубокой субрефракции и скользящем падении.

1. Пусть $z=50$ м, $\vartheta_0 = 89°$, $\varepsilon_1 = 1{,}000645$, $\lambda = 4$ м, $a = d\varepsilon/dz = -8\cdot10^{-8}\frac{1}{м}$ (случай «стандартной» атмосферы), $w = \frac{2k_0}{3a}\sqrt{(az + \varepsilon_1\cos^2\vartheta_0)^3} \simeq 68$ имеет место случай $w \gg 1$. Согласно (25)

$$\Theta\left(z, \lambda, \frac{d\varepsilon}{dz}, \vartheta_0\right) \simeq \frac{\delta}{w^2} \simeq 10^{-3}\%.$$

2. Пусть $z = 25$ м, $\vartheta_0 = 90°$, $\lambda = 4$ м, $a = d\varepsilon/dz = 4\cdot10^{-7}\frac{1}{м}$ (случа глубокой субрефракции), $w = \frac{2k_0}{3a}\sqrt{(az)^3} \simeq 0{,}08$, т. е. имеет место слу

чай $w \ll 1$. Согласно (26) для этого случая

$$\Theta\left(z,\ \lambda,\ \frac{d\varepsilon}{dz},\ \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Delta\gamma}{\gamma_{0\,\text{макс}}(z)} \simeq \frac{1}{\varkappa\sqrt{3}\,v} - 1 \simeq 26\%.$$

Укажем, что приведенные примеры, как нам кажется, убедительно подтверждают факт определяющего влияния вида функции распределения диэлектрической проницаемости среды на величину и характер радиорефракции при малых углах скольжения (больших зенитных углах), установленный ранее для случая сферически-слоистой атмосферы в [4] и [5].

Все соотношения, определяющие зависимость от длины волны и эффективных параметров неоднородностей таких характеристик, как углы прихода (а значит и углы рефракции), дальность горизонта и относительная рефракция, разумеется, можно без труда перенести на случай упругих волн.

Ввиду того что ряд рассмотренных нами случаев рефракции плоской электромагнитной волны в плоско-слоистых формированиях представляет как прикладной, так и общефизический интерес целесообразно изложить их отдельно.

З а к л ю ч е н и е. На основе волновых представлений рассмотрены вопросы об определении углов прихода, дальности горизонта и относительной рефракции электромагнитных волн при их распространении в плоско-слоистых неоднородных средах. Показано, что зависимость указанных характеристик от длины распространяющейся волны и эффективных параметров неоднородности целиком определяется функцией относительной рефракции для заданного типа ε-профиля. Установлено, что между углами прихода существует более сложная связь, чем связь в форме общеизвестного закона преломления (закона Снеллиуса). Лишь в предельном случае, а именно в случае геометрической оптики, когда функция относительной рефракции стремится к нулю, углы прихода утрачивают частотную зависимость и закон рефракции переходит в закон Снеллиуса. В заключение приведены примеры определения функций относительной рефракции для линейного ε-профиля и ε-профиля переходного слоя типа Эпштейна, а также численные значения относительной рефракции для случая распространения волн метрового диапазона в условиях так называемой стандартной атмосферы и в условиях глубокой субрефракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Ф о к, Приближенная формула для дальности горизонта при наличии сверхрефракции, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 5, 560.
2. Л. М. Б р е х о в с к и х, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.
3. P. E p s t e i n, Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1930, 16, 627.
4. Д. М. В ы с о к о в с к и й, Некоторые особенности расчета радиорефракции, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 3, 274.
5. А. В. Ш а б е л ь н и к о в, Влияние вида функции распределения диэлектрической проницаемости воздуха с высотой на рефракцию радиоволн в нижних слоях атмосферы, Радиотехника и электроника, 1956, 1, 3, 277.

Лаборатория радиофизики
Сибирского физико-технического института
при Томском государственном университете
им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
23 IX 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 7

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО НЕИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

П. П. Павлов

Исследованы электромагнитное поле, входное сопротивление и распределение тока вдоль бесконечно длинного неизолированного провода в проводящей среде при сосредоточенном возбуждении. Исследования выполнены в диапазоне частот от $6 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^7$ *гц* при расположении неизолированного провода в морской воде, во влажной и сухой почвах.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение электромагнитных волн вдоль бесконечно длинного провода, расположенного в воздухе, рассмотрено Зоммерфельдом [1], Нетером [2] и Владимирским [3]. В работе Кессениха [4] исследовано входное сопротивление такого провода. Вайнштейном рассмотрена классическая задача о возбуждении тонкого цилиндрического проводника конечной длины, расположенного в воздухе, сторонней электродвижущей силой, приложенной к произвольной точке проводника [5].

На практике иногда отрезки неизолированного цилиндрического проводника, расположенного в проводящей среде, служат в качестве излучающих элементов антенны. Однако вопрос об электромагнитном поле и о распределении тока вдоль неизолированного провода, расположенного в проводящей среде, до настоящего времени не нашел должного освещения в литературе.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА И ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ПРОВОДА

Выражая зависимость тока и составляющих поля от времени через $e^{-i\omega t}$ и вводя функцию Π при помощи соотношения

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right), \tag{1}$$

из уравнений Максвелла при симметрии поля относительно оси провода получаем

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon_k \Pi = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) запишем в следующем виде:

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma)\, Z_0\left(r\sqrt{k^2 - \gamma^2}\right) e^{i\gamma z}\, d\gamma. \tag{3}$$

Для того чтобы удовлетворить принципу излучения, решение уравнения (2) в проводящей среде, окружающей идеальный провод, принимаем в виде

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma)\, H_0^{(1)}(v_3 r)\, e^{i\gamma z}\, d\gamma, \tag{4}$$

е

$$v_3 = \sqrt{k_3^2 - \gamma^2}; \quad k_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'_{k_3}}.$$

Составляющие поля в проводящей среде определяются выражениями

$$E_r = -i\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma v_3 A(\gamma) H_1^{(1)}(v_3 r) e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{5}$$

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} v_3^2 A(\gamma) H_0^{(1)}(v_3 r) e^{i\gamma z} d\gamma, \tag{6}$$

$$H_\varphi = -i\omega\varepsilon_{k_3}\int_{-\infty}^{+\infty} v_3 A(\gamma) H_1^{(1)}(v_3 r) e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{7}$$

Неизвестную функцию $A(\gamma)$ найдем из граничного условия на поверхности идеального провода

$$E_{\text{стр}} = -E_z \text{ при } r = \rho, \tag{8}$$

е $E_{\text{стр}}$ — напряженность поля сторонних сил на поверхности провода. ри рассмотрении распространения электромагнитных волн по одиночному проводу Владимирский использует граничные условия Леонтовича

$$E_z + E_{\text{стр}} = \frac{\mu k}{k_\sigma} H_\varphi,$$

е

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad k_\sigma = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu + 4\pi i\mu\sigma}$$

волновые числа для вакуума и проводника. Он считает проводимость остаточно большой и принимает глубину проникновения поля в проводк много меньше радиуса провода. Это позволяет ему не рассматривать ле внутри проводника (при введении на поверхности цилиндра $r = \rho$ аевых условий Леонтовича).

Нас интересует электромагнитное поле неизолированного провода в апазоне частот от $6 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^7$ *гц*. На сравнительно низких радиочастотах глубина проникновения поля в проводник может быть соизмерима го радиусом. Вследствие этого при строгом решении задачи необходимо итывать поле внутри проводника. Однако при весьма большой проводимости проводника можно его считать идеальным, что позволяет избежать гематических трудностей и получить выражения, пригодные для аназа и расчета.

Подобно тому как принято в [3], будем считать, что электромагнитное поле частоты ω возбуждается электродвижущими силами $\mathscr{E}(z)e^{-i\omega t}$, пределенными на поверхности проводника. При этом принимаем, что z) направлено вдоль оси проводника.

Рассмотрим случай сосредоточенной электродвижущей силы, полагая пряженность поля сторонних сил не равной нулю только на участке $< z < a$. Эдс внешнего источника равна

$$\mathscr{E}_0 = \int_0^a E_{\text{стр}} dz.$$

нако случай излучения в полупространство ($z > 0$) можно получить в стом виде, если вблизи точки приложения эдс $\mathscr{E}_0$ расположена идеьно проводящая плоскость, перпендикулярная оси провода. Учитывая кальное отражение, в уравнениях составляющих поля при излучении олупространство необходимо принять эдс $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$.

Напряженность поля $E_{\text{стр}}$, вызванная эдс внешнего источника $\mathcal{E}$, можно представить в виде интеграла

$$E_{\text{стр}} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \gamma a}{\gamma a} e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{9}$$

Вводя обозначение

$$K(\gamma) = \frac{\mathcal{E}}{2\pi} \frac{\sin \gamma a}{\gamma a}, \tag{10}$$

получаем

$$E_{\text{стр}} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{11}$$

На основании граничного условия (8) находим

$$A(\gamma) = -\frac{K(\gamma)}{v_3^2 H_0^{(1)}(v_3\rho)}. \tag{12}$$

Ток в проводе I_z связан с составляющей H_φ поля в проводящей среде у поверхности провода соотношением

$$I_z = 2\pi\rho H_\varphi. \tag{13}$$

На основании (7) и (12) имеем при $a \to 0$

$$I_z = i\,\omega\rho\varepsilon_{k_3}\mathcal{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_1^{(1)}(v_3\rho)}{v_3 H_0^{(1)}(v_3\rho)} e^{i\gamma z} d\gamma. \tag{14}$$

Подынтегральная функция многозначна в комплексной плоскости γ. Точками разветвления являются точки $\gamma = \pm k_3$. Для того чтобы ограничиться рассмотрением одной ветви при $z > 0$, проведем разрез из точки разветвления $\gamma = k_3$ в бесконечность. В результате интеграл сведется к обходу L вокруг линии разреза, связанной с точкой разветвления $\gamma = k_3$.

Интеграл (14) равен интегралу по разрезу. Произведем замену

$$k_3 - \gamma = s, \quad d\gamma = -ds.$$

В результате замены получаем

$$\int_{L_R} = \underset{(1)}{\int_{-iR}^{-i\rho_1}} + \underset{(2)}{\int_{-i\rho_1}^{-iR}} + \int_{C_{\rho_1}}.$$

При $\rho_1 \to 0$ интеграл по окружности C_{ρ_1} стремится к нулю. На первом берегу

$$s = \tau e^{i\frac{3\pi}{2}}, \qquad v_{31} = \sqrt{\tau e^{i\frac{3\pi}{2}}(2k_3 + i\tau)}.$$

На втором берегу

$$s = \tau e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad v_{32} = \sqrt{\tau e^{-i\frac{\pi}{2}}(2k_3 + i\tau)}.$$

Таким образом, имеем

$$J_{L_R} = -ie^{ik_3 z} \int_{\rho_1}^{R} \left\{ \frac{H_1^{(1)}(e^{i\pi} v_{32}\rho)}{e^{i\pi} v_{32} H_0^{(1)}(e^{i\pi} v_{32}\rho)} - \frac{H_1^{(1)}(v_{32}\rho)}{v_{32} H_0^{(1)}(v_{32}\rho)} \right\} e^{-z\tau} d\tau. \tag{15}$$

Используя формулу

$$H_p^{(1)}(e^{i\pi} z) = -e^{-i\pi p} H_p^{(2)}(z)$$

устремляя $\rho_1 \to 0$ и $R \to \infty$, получаем

$$J_{L_R} = -ie^{ik_3 z}\int_0^\infty \left[\frac{H_1^{(2)}(v_{32}\rho)}{v_{32}H_0^{(2)}(v_{32}\rho)} - \frac{H_1^{(1)}(v_{32}\rho)}{v_{32}H_0^{(1)}(v_{32}\rho)}\right] e^{-z\tau}\,d\tau. \tag{16}$$

ласть интегрирования ограничим значениями τ, удовлетворяющими равенству

$$|v_{32}|\rho = |\sqrt{-i\tau(2k_3 + i\tau)}|\rho \ll 1 \tag{17}$$

и

$$|\sqrt{-i\tau(2k_3 + i\tau)}| = \frac{1}{\alpha\rho} \quad \text{при } \alpha \gg 1. \tag{18}$$

ри наличии неравенства (17) заменим функции Ханкеля первыми членами разложения их в ряды. Опуская величины высшего порядка малости, получаем

$$J_{L_R} = \frac{2}{\pi\rho}e^{ik_3 z}\left\{\int_0^m \frac{e^{-z\tau}\,d\tau}{v_{32}^2\left[1 - i\frac{2}{\pi}\ln(v_{32}\rho)\right]} + \int_0^m \frac{e^{-z\tau}\,d\tau}{v_{32}^2\left[1 + i\frac{2}{\pi}\ln(v_{32}\rho)\right]}\right\} \tag{19}$$

и

$$J_{L_R} = \frac{4\pi}{\rho}e^{ik_3 z}\int_0^m \frac{1}{\{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2 + \pi^2}\,\frac{e^{-z\tau}\,d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)}. \tag{20}$$

рхний предел интеграла m находим из неравенства (17).

Полагая

$$k_3 = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon'_{k_3}} = n + ip,$$

авнение (18) запишем в виде

$$\tau^4 + 4p\tau^3 + 4(n^2 + p^2)\tau^2 - \frac{1}{(\alpha\rho)^4} = 0. \tag{21}$$

ачение одного из корней этого уравнения является верхним пределом теграла (20).

В табл. 1 приведены корни уравнения (21), вычисленные для морской ды, влажной и сухой почв при $\rho = 2$ *мм* и $\alpha = 10$.

Таблица 1

Частота f, *гц*	τ, *непер/м*		
	морская вода $\left(\varepsilon'_3 = 80,\ \sigma_3 = 4\ \frac{1}{\text{ом}\cdot\text{м}}\right)$	влажная почва $\left(\varepsilon'_3 = 10,\ \sigma_3 = 5\cdot10^{-2}\ \frac{1}{\text{ом}\cdot\text{м}}\right)$	сухая почва $\left(\varepsilon'_3 = 4,\ \sigma_3 = 10^{-3}\ \frac{1}{\text{ом}\cdot\text{м}}\right)$
$6\cdot10^3$	49,69125	49,97582	—
$3\cdot10^4$	49,30699	49,92301	—
$3\cdot10^5$	47,77654	49,75647	49,9667
$3\cdot10^6$	42,89065	49,23667	49,9201
$3\cdot10^7$	28,10280	47,83160	49,8761

Запишем интеграл (20) в виде суммы двух интегралов:

$$J_{L_R} = \frac{4\pi}{\rho}e^{ik_3 z}\left\{\int_0^1 \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2}\,\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)} + \right.$$
$$\left. + \int_1^m \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2}\,\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)}\right\}. \tag{22}$$

Выполненное исследование интегральной функции показывает, что рой интеграл выражения (22) при $z > 1$ имеет весьма малую величину го можно не учитывать.

При $\tau = 0$ знаменатель подынтегральной функции выражения

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2} \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)} \tag{23}$$

обращается в нуль. Вследствие этого подынтегральная функция равна бесконечности. Для того чтобы исключить точку $\tau = 0$, разделим промежуток интегрирования от 0 до 1 на два отрезка с пределами от 0 до h и от h до 1. В результате выражение (23) представим в виде

$$J = \int_0^h \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2} \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)} + \int_h^1 \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2} \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)}. \tag{24}$$

Предел интегрирования h выбираем, исходя из неравенства

$$|-i2k_3| \gg \tau = h. \tag{25}$$

При наличии неравенства (25) в подынтегральной функции первого интеграла выражения (24) можно пренебречь величиной τ^2. На основании этого запишем

$$J_1 = \int_0^h \frac{1}{\pi^2 + \{\ln[-i\tau(2k_3 + i\tau)\rho^2]\}^2} \frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3 + i\tau)} \simeq \simeq -\frac{1}{i2k_3} \int_0^h \frac{e^{-z\tau}d\tau}{\tau[\ln(-i2k_3\rho^2) + \ln\tau]^2}. \tag{26}$$

При $h \ll 1$ и конечных значениях z, представляющих практический интерес, экспоненциальную функцию $e^{-z\tau}$ можно принять равной e^{-zh} и вынести за знак интеграла.

Обозначив

$$a = \ln(-i2k_3\rho^2),$$

выражение (26) запишем в виде

$$J_1 = -\frac{e^{-zh}}{i2k_3} \int_0^h \frac{d\tau}{\tau(a + \ln\tau)^2}. \tag{27}$$

Произведем замену переменного:

$$\ln\tau = u, \qquad d\ln\tau = du.$$

Следовательно, получим

$$J_1 = -\frac{e^{-zh}}{i2k_3} \int_{-\infty}^{\ln h} \frac{du}{(a + u)^2} \tag{28}$$

или

$$J_1 = \frac{1}{i2k_3} \frac{e^{-zh}}{a + \ln h}. \tag{29}$$

Подставив в (29) значение a, имеем

$$J_1 = \frac{1}{i2k_3} \frac{e^{-zh}}{\ln(-i2k_3\rho^2) + \ln h}. \tag{30}$$

Таким образом, интеграл (23) представим в виде

$$J = \frac{1}{i2k_3}\frac{e^{-zh}}{\ln(-i2k_3\rho^2)+\ln h} + \int_h^1 \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)}. \quad (31)$$

Выражение для тока в проводе имеет вид

$$I_z = i4\pi\omega\varepsilon_{k_3}\mathscr{E}e^{ik_3z}\left\{\frac{1}{i2k_3}\frac{e^{-zh}}{\ln(-i2k_3\rho^2)+\ln h} + \int_h^1 \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)} + \int_1^m \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)}\right\}. \quad (32)$$

При $z > 1$ последним интегралом выражения (32) можно пренебречь, так как при $z\tau > 1$ экспоненциальная функция мала, в то время как модуль знаменателя подынтегральной функции большой.

Обозначив

$$F(z) = \frac{1}{i2k_3}\frac{e^{-zh}}{\ln(-i2k_3\rho^2)+\ln h} + \int_h^1 \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)} + \int_1^m \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\frac{e^{-z\tau}d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)},$$

выражение (32) запишем в виде

$$I_z = i4\pi\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}e^{ik_3z}F(z). \quad (33)$$

По формуле (33) были вычислены кривые зависимости модуля тока от z, а также модулей функцией e^{ik_3z} и $F(z)$ для неизолированного провода радиуса $\rho = 2$ *мм*, расположенного в морской воде, во влажной и сухой

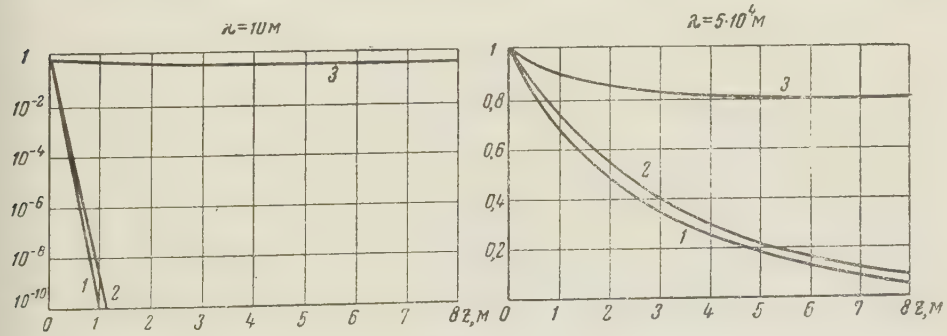


Рис. 1

почвах. На рис. 1, 2 и 3 приведены нормированные графики модулей функций: *1* — $|I_z|$; *2* — $|e^{ik_3z}|$; *3* — $|F(z)|$ соответственно для морской воды, влажной и сухой почв. Из графиков видно, что функция $F(z)$ является медленно изменяющейся. При расположении неизолированного провода в морской воде и во влажной почве закон изменения тока в широком диапазоне частот в основном определяется быстро-

изменяющейся функцией $e^{ik_3 z}$. Очевидно, для этих сред при инженерных расчетах модуль функции $F(z)$ приближенно можно рассматривать как постоянный коэффициент.

В случае расположения неизолированного провода в сухой почве закон изменения тока уже значительно отличается от экспоненциального закона $e^{ik_3 z}$, так как функция $e^{ik_3 z}$ по абсолютной величине меняется сравнительно медленно.

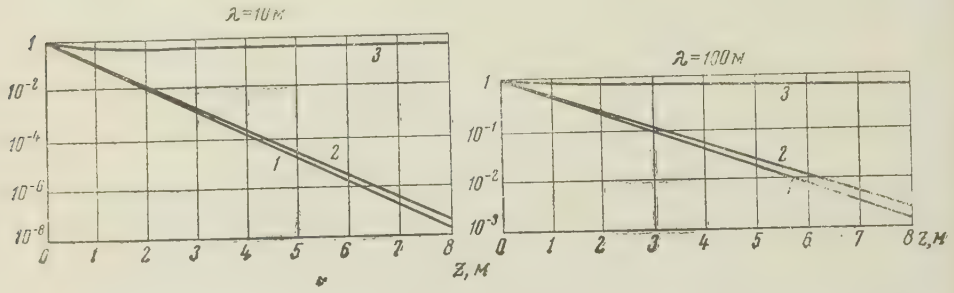


Рис. 2

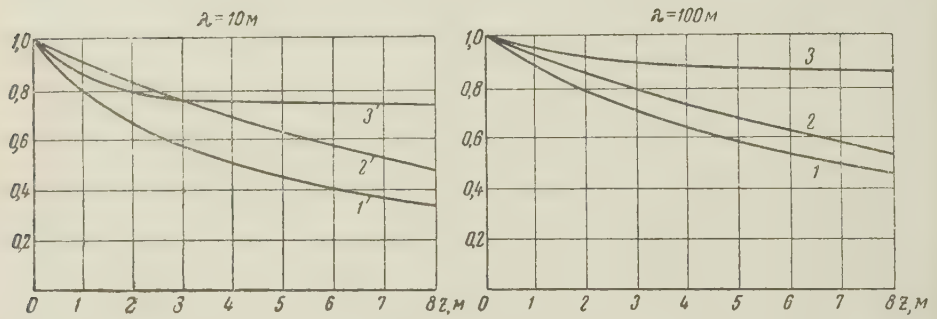


Рис. 3

Для определения мощности, расходуемой источником внешней электродвижущей силы, вычислим ток вблизи точки приложения эдс.

Принимая $z = 0$ в (32), получаем

$$I_0 = i4\pi\omega\varepsilon_{k_3}\mathscr{E}\left\{\frac{1}{i2k_3}\,\frac{1}{\ln(-i2k_3\rho^2)+\ln h}+\right.$$
$$+\int_h^1 \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\,\frac{d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)}+$$
$$\left.+\int_1^m \frac{1}{\pi^2+\{\ln[-i\tau(2k_3+i\tau)\rho^2]\}^2}\,\frac{d\tau}{-i\tau(2k_3+i\tau)}\right\}. \qquad (34)$$

Учитывая, что $\mathscr{E} = 2\mathscr{E}_0$, входное сопротивление провода равно

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\mathscr{E}_0}{I_0} = \frac{\mathscr{E}}{2I_0}, \qquad R_{\text{вх}} = \frac{\mathscr{E}_0}{\operatorname{Re} I_0} = \frac{\mathscr{E}}{2\operatorname{Re} I_0},$$

так как в рассматриваемом случае имеет место излучение в одну сторону. При излучении в обе стороны такой же ток получается при приложении

Таблица 2

Частота f, *гц*	Входное сопротивление $Z_{вх}$		
	морская вода $\left(\varepsilon'_з = 80,\ \sigma_з = 4\ \frac{1}{ом \cdot м}\right)$	влажная почва $\left(\varepsilon'_з = 10,\ \sigma_з = 5 \cdot 10^{-2}\ \frac{1}{ом \cdot м}\right)$	сухая почва $\left(\varepsilon'_з = 10,\ \sigma_з = 10^{-3}\ \frac{1}{ом \cdot м}\right)$
$6 \cdot 10^3$	$0{,}16939 - i\ 0{,}13166$	—	—
$3 \cdot 10^6$	—	$14{,}903 - i\ 10{,}765$	$150{,}92 - i\ 53{,}519$
$3 \cdot 10^7$	$3{,}2393 - i\ 2{,}3355$	$41{,}133 - i\ 19{,}066$	$153{,}82 - i\ 30{,}912$

вое большей эдс $2\mathscr{E}_0$ и входное сопротивление равно $2Z_{вх}$. Мощность, сходуемая источником внешней эдс, равна

$$P = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 \operatorname{Re} I_0 = \frac{\mathscr{E}_0^2}{2R_{вх}} = \frac{\mathscr{E}^2}{8R_{вх}}.$$

В табл. 2 приведены значения входного сопротивления неизолированного провода радиуса $\rho = 2$ *мм*.

2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВОЛНЫ И ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕННОСТИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО НЕИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДА

Составляющая поля H_φ пространственной волны согласно (17) и (12) ределяется выражением

$$H_\varphi = i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_1^{(1)}(v_3 r)}{v_3 H_0^{(1)}(v_3\rho)}e^{i\gamma|z|}d\gamma. \tag{35}$$

нтеграл выражения (35) для больших значений r и z можно вычислить тодом перевала.

Используя асимптотическое представление функции Ханкеля при $\gg 1$ и $z \gg 1$, имеем

$$H_1^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma z} = \left(\frac{2}{\pi r\sqrt{k_3^2-\gamma^2}}\right)^{1/2} e^{i\left(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\gamma z}. \tag{36}$$

ычислив производную показательной функции (36) и приравняв ее лю, имеем

$$\frac{\gamma_0}{\sqrt{k_3^2-\gamma^2}} = \frac{z}{r}. \tag{37}$$

означив

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{z}{r}, \tag{38}$$

угол ϑ отсчитывается от плоскости, перпендикулярной оси провода, лучаем

$$\gamma_0^2(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta) = k_3^2\operatorname{tg}^2\vartheta. \tag{39}$$

(39) находим

$$\gamma_0 = \pm k_3 \sin\vartheta. \tag{40}$$

ункция $v_3 H_0^{(1)}(v_3\rho)$ выражения (35) медленно изменяется в окрестности ловых точек. Ее можно вынести за знак интеграла и вычислить при $= \gamma_0 = k_3\sin\vartheta$ для значений $\vartheta \neq \pm\pi/2$, так как при $\vartheta = \pm\pi/2$ $\gamma_0 = k_3$, е. функция $v_3 = \sqrt{k_3^2 - \gamma_0^2} = 0$.

Следовательно, выражение (35) можно записать в виде

$$H_\varphi = i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{2\pi_3}\frac{1}{\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}\,H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2})}\left\{\int\limits_{\varepsilon_{1\text{окр}}(-k_3\sin\vartheta)} H_1^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma|z|}d\gamma + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\varepsilon_{2\text{окр}}(k_3\sin\vartheta)} H_1^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma|z|}d\gamma\right\}. \quad (41)$$

Учитывая, что подынтегральная функция выражения (41) весьма мала в точках γ, удаленных от точек $\gamma_0 = \pm k_3\sin\vartheta$, можем перейти от интегрирования по отрезкам в окрестности седловых точек к интегрированию по контуру l, идущему от $-\infty$ к $+\infty$. В результате этого выражение (41) запишем в виде

$$H_\varphi = i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_1^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma|z|}d\gamma. \quad (42)$$

Учитывая, что при $|\sqrt{k_3^2-\gamma^2}|r \gg 1$

$$H_1^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2}) = -iH_0^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2}),$$

имеем

$$H_\varphi = \frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma|z|}d\gamma. \quad (43)$$

Известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(r\sqrt{k_3^2-\gamma^2})\,e^{i\gamma|z|}d\gamma = -i2\frac{e^{ik_3R}}{R},$$

где $R = \sqrt{r^2+z^2}$.

Следовательно, получаем

$$H_\varphi = -i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2})}\frac{e^{ik_3R}}{R}. \quad (44)$$

При малых значениях радиуса провода ρ функцию Ханкеля $H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2})$ заменим первыми членами разложения ее в ряд и выражение (44) запишем в виде

$$H_\varphi = -i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}\left(1-i\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{\rho\sqrt{k_3^2-\gamma_0^2}}\right)}\frac{e^{ik_3R}}{R}. \quad (45)$$

Имея выражение (45) для H_φ, нетрудно найти составляющие поля E_r и E_z. Подставив в (45) значение γ_0, находим

$$H_\varphi = -i\frac{\omega\varepsilon_{k3}\mathscr{E}}{\pi}\frac{1}{k_3\cos\vartheta\left(1-i\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{\rho\,k_3\cos\vartheta}\right)}\frac{e^{ik_3R}}{R}. \quad (46)$$

Ввиду сильного затухания, как показали исследования, амплитуда тока в проводе резко уменьшается с увеличением координаты z. Это позволяет бесконечно длинный провод заменить проводом конечной длины. Следо

ательно, при больших значениях R функция

$$f(\vartheta) = \frac{1}{\cos\vartheta\left(1 - i\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{1{,}12}{\rho k_3\cos\vartheta}\right)} \qquad (47)$$

пределяет характеристику направленности провода конечной длины. тметим, что выражением (47) можно пользоваться при $0 \leqslant \vartheta < \pi/2$. Исследование функции (47) показывает, что основная часть электромагитной энергии сосредоточена в конусе, образующая которого составяет с осью провода сравнительно небольшой угол.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность . А. Вайнштейну за ценные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

. A. Sommerfeld, Ann. der Physik und Chemie, 1899, 67, H. 2, 233; Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, II, ОНТИ, 1937, стр. 925—932.
. F. Noether, Sow. Phys., 1935, 8, 1.
. В. В. Владимирский, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1944, 8, 3, 139.
. В. Н. Кессених, Докл. АН СССР, 1940, 27, 6, 558.
. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 1959, 29, 6. 673.

Поступила в редакцию
16 VII 1960

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 7

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ЛИНИЯХ

Р. В. Хохлов

Статья посвящена изучению процесса распространения электромагнитных волн в нелинейных линиях, когда фазовые скорости основной и второй гармонических составляющих волны близки друг к другу, в то время как скорости остальных гармоник далеки от них. Подробно проанализирована линия в отсутствие диссипации энергии, после чего выяснена роль затухания в системе. Анализ проведен на основе качественного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих процесс параметрического взаимодействия гармонических составляющих, а также на основе аналитического решения их для отдельных случаев.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возрос интерес к волновым процессам в линиях с нелинейными распределенными параметрами. Это объясняется теми возможностями, которые открывают такие линии в создании новых радиотехнических устройств типа малошумящих усилителей и преобразователей частоты. Так, ряд авторов [1—3] и др. довольно подробно осветил вопросы параметрических эффектов усиления и преобразования частоты в линиях, параметры которых изменяются в пространстве и во времени по закону бегущей синусоидальной волны. Одним из путей реализации такого изменения параметров является путь пропускания сквозь линию высокочастотного сигнала — «накачки». Однако сам этот высокочастотный сигнал может искажаться в нелинейной линии и черты этого искажения априори неясны.

Другой интересной задачей, тесно связанной с процессом распространения волн в нелинейных линиях, является проблема умножения частоты. Взаимодействие волны и ее гармоник приводит к обмену энергии между ними и, как показано ниже, при определенных условиях почти вся волновая энергия может быть трансформирована в энергию одной из высших гармонических составляющих. Это обстоятельство может быть положено в основу создания умножителей частоты.

Таким образом, проблема распространения волн в нелинейных линиях приобретает все возрастающий интерес.

Следует различать два предельных случая — случай сильнодиспергирующей линии и случай отсутствия дисперсии в ней.

Во втором случае возникающие за счет нелинейности параметров линии высшие гармонические составляющие основного сигнала имеют ту же фазовую скорость распространения, что и сам сигнал. В результате этого имеется сильное взаимодействие между сигналом и его всеми гармоническими составляющими, и энергия при распространении по линии распределяется определенным образом между этими составляющими и основным сигналом. Форма сигнала, следовательно, искажается и приобретает вид ударной волны [4—6].

В случае наличия дисперсии только несколько (в простейшем случае одна) высших гармоник сигнала имеют скорости распространения, близкие к скорости основной составляющей. Взаимодействие таким образом осуществляется только между этими составляющими и основной, в результате чего имеет место, вообще говоря, процесс энергетических биений.

Настоящая работа посвящена изучению именно этого процесса в простейшем случае, когда только одна, вторая гармоника сигнала имеет фазовую скорость распространения, близкую к скорости основной составляющей. Интересно отметить, что рассматриваемый случай является в сущности пространственно-временным аналогом процесса параметрического взаимодействия между двумя типами колебаний маятника, проанализированного в свое время А. А Виттом и Г. С. Гореликом [7].

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ограничимся рассмотрением слабонелинейной линии, нелинейным параметром в которой является распределенная емкость, так что

$$Q = CU + DU^2, \tag{1}$$

где Q — погонный заряд; U — напряжение. Параметр D, характеризующий нелинейность среды, в дальнейшем считается малым.

Имеется известная трудность в строгой постановке задачи о распространении волн в диспергирующей среде. Написание обычных телеграфных уравнений (с общепринятыми обозначениями)

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial t} - GU, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -L\frac{\partial U}{\partial t} \tag{2}$$

или их следствия

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - LG\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

вообще говоря, неправомерно, так как входящие в них параметры L, C, G и D являются функциями частоты ω. Тем не менее, для линейных и слабонелинейных сред можно учесть эту зависимость прямо на этапе уравнений для спектральных составляющих или укороченных уравнений соответственно, проводя вывод их без учета этой зависимости. Поступая именно таким образом, примем, что волновой процесс в рассматриваемом случае описывается выражением

$$U = U_1 \cos[\omega t - \gamma z + \varphi_1] + U_2 \cos[2(\omega t - \gamma z) + \varphi_2], \tag{4}$$

где амплитуды U_1 и U_2 и фазы φ_1 и φ_2 являются медленно меняющимися функциями координаты z. Величина γ определена в (4) как

$$\gamma = \omega\sqrt{\frac{1}{2}(L_1C_1 + L_2C_2)}, \tag{4}$$

где индекс 1 означает, что значения параметров взяты для частоты ω, а индекс 2 — для частоты 2ω. Тем самым принято, что линия, возбуждаемая каким-либо путем на левом конце — входе, является согласованной на правом конце — выходе. Проводя обычным образом вывод укороченных уравнений, которые описывают поведение амплитуд и фаз, имеем

$$\begin{gathered}\dot{U}_1 + \beta_1 U_1 U_2 \sin\Phi + \delta_1 U_1 = 0,\\ \dot{2}\varphi_1 + \frac{\Delta}{2} + 2\beta_1 U_2 \cos\Phi = 0,\\ \dot{U}_2 - \beta_2 U_1^2 \sin\Phi + \delta_2 U_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 - \frac{\Delta}{2} + \beta_2 \frac{U_1^2}{U_2}\cos\Phi = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где Φ — разность фаз:

$$\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2; \tag{7}$$

параметр Δ характеризует рассогласование парциальных систем по фа-

зовым скоростям:

$$\Delta = \frac{L_1C_1 - L_2C_2}{\gamma}\omega^2; \tag{8}$$

$\beta_{1,2}$ — коэффициенты связи; $\delta_{1,2}$ — коэффициенты затухания:

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{LD\omega^2}{\gamma}; \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{LG\omega}{\gamma}. \tag{9}$$

Вычитая последнее уравнение системы (6) из предпоследнего, получим фазовое уравнение

$$\dot{\Phi} + \Delta + \left[2\beta_1 U_2 - \beta_2 \frac{U_1^2}{U_2}\right]\cos\Phi = 0. \tag{10}$$

Укороченные уравнения (6) и (10) в указанном выше смысле более строги, чем исходные телеграфные уравнения (2). Они полностью описывают процесс распространения волн в диспергирующей линии, когда имеется взаимодействие только основной и второй гармонических составляющих.

Уравнения (6) нельзя решить в замкнутом виде в общем случае. Тем не менее, анализ процесса в целом можно провести на основе рассмотрения различных предельных случаев. Последующие параграфы и посвящены этому рассмотрению.

2. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ЗАТУХАНИЯ

В случае отсутствия затухания в системе уравнения (6) и (10) поддаются качественному интегрированию на фазовой плоскости. Приступая к такому интегрированию, введем новые переменные

$$w = U_1^2, \quad x = U_2 \sin\Phi, \quad y = U_2\cos\Phi. \tag{11}$$

Система уравнений (6) и (10) приобретает тогда вид

$$\dot{w} = -2\beta_1 wx, \quad \dot{x} = \beta_2 w + \Delta y - 2\beta_1 y^2, \quad \dot{y} = -\Delta x + 2\beta_1 xy. \tag{12}$$

Прежде всего необходимо отметить, что система уравнений (12) допускает первый интеграл, который имеет смысл закона сохранения энергии. Это соотношение имеет следующую форму:

$$\beta_1(x^2 + y^2) + \beta_2 w = \beta_1(x_0^2 + y_0^2) + \beta_2 w_0 = \beta_1 U_2^0. \tag{13}$$

Введенные в (13) постоянные x_0, y_0 и w_0 имеют смысл входных значений величин x, y и w, а U_0 — соответствующая им в энергетическом отношении приведенная амплитуда второй гармонической составляющей. Исключая теперь при помощи (13) значение w из второго уравнения (12), можно прийти к системе

$$\dot{x} = \beta_1 U_0^2 + \Delta y - \beta_1 x^2 - 3\beta_1 y^2,$$
$$\dot{y} = -\Delta x + 2\beta_1 xy. \tag{14}$$

Разделив одно из этих уравнений на другое, получаем уравнение, описывающее поведение интегральных кривых на плоскости xy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\beta_1 U_0^2 + \Delta y - \beta_1 x^2 - 3\beta_1 y^2}{x(2\beta_1 y - \Delta)}. \tag{15}$$

На основе этого уравнения, рассматривая характер имеющихся здесь особых точек, можно легко определить картину поведения интегральных кривых при различных соотношениях параметров. Эта картина изображена на рис. 1, *а*, *б*, *в* для случаев $\Delta = 0$, $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ и $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$.

Все интегральные кривые, изображающие возможные движения в системе, расположены внутри ограничивающей интегральной кривой — окружности радиусом U_0. Внешние к этой окружности интегральные кривые физически не могут быть реализованы, так как они соответствуют состояниям с отрицательной энергией основной составляющей. Сама ограничивающая интегральная кривая может быть полностью реализована только в случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$ (рис. 1, *в*). В противном случае она проходит через две особые точки типа седла, в которых пересекается другой интегральной кривой — прямой $y = \Delta/2\beta_1$, т. е. является сепаратрисой (рис. 1, *а*, *б*). Движение (в предельном случае) изображается частью окружности, ограниченной седловыми точками и прямой, их соединяющей.

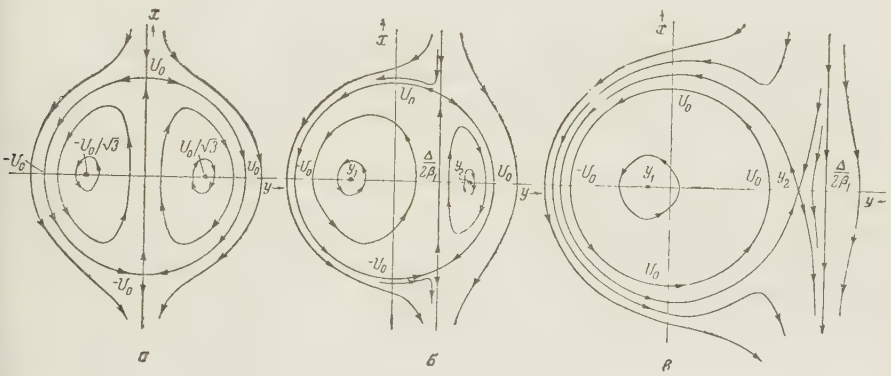


Рис. 1

а — картина поведения интегральных кривых уравнения (15) в случае $\Delta = 0$; *б* — картина поведения интегральных кривых уравнения (15) в случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$; *в* — картина поведения интегральных кривых уравнения (15) в случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$

Это означает, что если в системе имеется мощное волновое поле двойной частоты, то оно в случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$ не воздействует параметрически-резонансно на слабое поле основной составляющей. Причина отсутствия воздействия заключается в том, что рассогласование по фазовым скоростям Δ лежит вне зоны параметрического возбуждения основной составляющей. В области же $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ имеется параметрическое взаимодействие парциальных волновых систем, в результате чего в системе возникают пространственные биения между основной и второй гармоническими составляющими. Эти биения получаются в результате возбуждения и нарастания колебаний основной частоты и соответствующего спада амплитуды второй гармоники. Фазовые соотношения изменяются при этом таким образом, что основная составляющая начинает возбуждать вторую гармонику, подавляясь сама до нуля. После этого процесс периодически повторяется.

При $\Delta = 0$ вся энергия второй гармоники может переходить в энергию основной составляющей и обратно, т. е. могут иметь место полные биения. Последнее обстоятельство связано с тем, что интегральная кривая — сепаратриса — проходит в этом случае через точку $x = 0$, $y = 0$, что соответствует $U_2 = 0$,

$$U_1 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\, U_0.$$

Необходимо отметить, что пространственные биения имеют место и в случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$, что выражается в факте эксцентриситета в овалах интегральных кривых (рис. 1, *в*) и обусловлено наличием определенного взаимодействия между системами. Однако это взаимодействие не является резонансным — биения обладают малыми глубиной и периодом.

В случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ в системе имеются два устойчивых стационарных состояния, соответствующих особым точкам типа центр (рис. 1, *а*, *б*)

$$U_2 = |y_1|, \quad U_1 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}(U_0^2 - y_1^2)}, \cos\Phi = -1, \tag{16}$$

$$U_2 = |y_2|, \quad U_1 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}(U_0^2 - y_2^2)}, \cos\Phi = +1,$$

где

$$y_{1,2} = \frac{\Delta}{6\beta_1} \pm \sqrt{\frac{U_0^2}{3} + \frac{\Delta^2}{36\beta_1^2}}, \tag{17}$$

и изображающих синхронный волновой процесс с постоянными амплитудами первой и второй гармонических составляющих. Одно из них является синфазным, другое — антифазным. Когда $\Delta = 0$, в обоих синхронных состояниях переносимая мощность распределяется по парциальным системам, так что

$$\beta_2 U_1^2 = 2\beta_1 U_2^2. \tag{18}$$

Когда же $\Delta \neq 0$, эта симметрия в распределении мощности нарушается; в одном из синхронных состояний мощность по сравнению с (18) преобладает в основной составляющей, в другом состоянии мощность преобладает во второй гармонике.

Все другие возможные состояния системы изображаются замкнутыми интегральными кривыми, окружающими две особые точки и описывающими процесс пространственных биений около этих стационарных состояний.

При достаточно больших расстройках, когда $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$ (рис. 1, *в*), состояние с преобладающей мощностью на второй гармонике исчезает и остается только синхронное состояние, характеризующееся преобладающей мощностью на основной составляющей. Интересно отметить, что это оставшееся состояние (y_1 на рис. 1, *в*) в зависимости от знака расстройки может быть и синфазным, и антифазным. Если фазовая скорость основной составляющей в отсутствие взаимодействия выше скорости гармоники, то оставшееся состояние является синфазным, если же ниже — антифазным.

Другие возможные состояния системы изображаются замкнутыми интегральными кривыми, которые окружают оставшуюся в этом случае особую точку. Они описывают колебания амплитуды и фазы около синхронного состояния, т. е. пространственные биения. Одна из интегральных кривых проходит через точку $x = 0$, $y = 0$ на фазовой плоскости. Эта траектория описывает режим биений, характеризующийся полной перекачкой энергии второй гармоники в первую (но не наоборот).

Таким образом, на основе рассмотрения фазовой картины движений на плоскости xy можно выяснить много характерных черт и особенностей системы. Вместе с тем, ряд черт ускользает при этом от анализа. Такими наиболее важными чертами являются пространственные протяженности, масштабы процессов. Для того чтобы их определить, в следующем параграфе рассмотрен ряд случаев, допускающих аналитическое решение.

3. МАСШТАБЫ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

По видимому, неэлементарные случаи, допускающие аналитическое решение, исчерпываются случаями малых колебаний амплитуд и фазы около синхронных состояний и случаями движений по траекториям $U_2 = U_0$ и $y = \Delta/2\beta_1$. Случаи эти мы рассмотрим порознь, после чего на их основе проанализируем пространственные характеристики процессов в общем случае систем без затухания.

А. Движение по эллипсам — ближайшим замкнутым траекториям, окружающим особые точки $x = 0$, $y = y_{1,2}$ в случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ являет-

ся, очевидно, гармоническим. Уравнения, его описывающие, можно легко получить, линеаризируя уравнения (14) около этих точек. Для траекторий, расположенных вблизи точки $x = 0$, $y = y_2$ (рис. 1, *б*), имеем

$$\dot{x} = -a\eta, \qquad \dot{\eta} = bx, \tag{19}$$

где

$$\eta = y - y_2; \quad a = \sqrt{12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2}; \quad b = -\frac{2}{3}\Delta + \frac{1}{3}\sqrt{12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2}. \tag{20}$$

Отсюда видно, что волновое число Г пространственных биений определяется соотношением

$$\Gamma^2 = ab = \frac{1}{3}(12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2) - \frac{2}{3}\Delta\sqrt{12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2}. \tag{21}$$

Легко проверить, что в граничном случае, когда $|\Delta| = 2\beta_1 U_0$, волновое число Г обращается в нуль. При близких к граничным значениям случаях волновое число равно

$$\Gamma^2 = \frac{1}{2}(4\beta_1^2 U_0^2 - \Delta^2) + \frac{3}{8}(2\beta_1 U_0 - \Delta)^2 + \ldots. \tag{22}$$

Получая совершенно аналогичным образом выражение для волнового числа процессов, изображаемых эллипсами, близкими к $x = 0$ и $y = y_1$, имеем

$$\Gamma^2 = \frac{1}{3}(12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2) + \frac{2}{3}\Delta\sqrt{12\beta_1^2 U_0^2 + \Delta^2}. \tag{23}$$

При больших значениях рассогласования, $|\Delta| \gg \sqrt{12}\beta_1 U_0$, когда параметрическое взаимодействие между парциальными системами очень слабое,

$$\Gamma \simeq \Delta, \tag{24}$$

т. е. процесс биений сводится к простому сложению двух волн с собственными парциальными фазовыми скоростями.

Б. Движение по ограничивающей траектории, где $U_2 = U_0$, $U_1 = 0$, описывается фазовым уравнением

$$\dot{\Phi} + \Delta + 2\beta_1 U_0 \cos\Phi = 0. \tag{25}$$

Уравнение это решается в явном виде (см., например, [8]). В случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ оно описывает процесс экспоненциального перехода из стационарной фазы

$$\Phi_c = \arccos\left(\frac{\Delta}{2\beta_1 U_0}\right) \tag{26}$$

с положительным значением $\sin\Phi$ в стационарную фазу с отрицательным значением $\sin\Phi$. Хотя этот переход занимает бесконечно большую длину x, в основном он происходит на длине ξ, равной по порядку

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{4\beta_1^2 U_0^2 - \Delta^2}}. \tag{27}$$

Другая часть предельной траектории в случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ определяется условием $y = \Delta/2\beta_1$. Подставляя его в первое уравнение (14), можно получить

$$\dot{x} = \beta_1\left(U_0^2 - \frac{\Delta^2}{4\beta_1^2}\right) - \beta_1 x^2. \tag{28}$$

Решение уравнения (28) имеет вид

$$x = \sqrt{U_0^2 - \frac{\Delta^2}{4\beta_1^2}}\,\mathrm{th}\,\beta_1(z - z_0)\sqrt{U_0^2 - \frac{\Delta^2}{4\beta_1^2}}, \qquad (29)$$

где z_0 — постоянная интегрирования. Оно описывает процесс экспоненциального перехода системы из стационарного положения на окружности $U_2 = U_0$ с отрицательным значением $\sin\Phi$ в положение $U_2 = U_0$ и $\sin\Phi > 0$. Точно так же, как и в случае движения по дуге окружности, длина этого перехода бесконечна. Однако в основном он происходит, как и в том случае, на длине, определяемой по порядку соотношением (27).

Интересно отметить, что в случае $\Delta = 0$ только что полученное решение * соответствует таким граничным условиям, когда на входе имеется только основная составляющая волнового поля, а вторая гармоника отсутствует вовсе. Из решения (29) следует, что в этом случае амплитуда второй гармоники монотонно нарастает, а амплитуда основной составляющей подавляется нацело. В результате вся энергия переходит во вторую гармонику.

Как следует из приведенного в предыдущем параграфе качественного рассмотрения, такой вывод не является правомерным. Это связано с тем, что траектория решения (29) является сепаратрисой; стационарное значение $U_2 = U_0$, $U_1 = 0$, куда стремится по ней система, не является устойчивым. Любая малая рассогласованность в фазовых скоростях, флуктуация амплитуды гармоники на входе и т. п. приведут к тому, что движение будет осуществляться по замкнутой траектории, которая описывает пространственные биения. Причина неустойчивости — параметрическое возбуждение колебаний основной составляющей.

В случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$ движение по ограничивающей траектории $U_2 = U_0$ является устойчивым, стационарного значения фазы (26) в этом случае не существует. Фаза за пространственный период имеет определенный средний прирост. Значения $\cos\Phi$ и $\sin\Phi$ являются периодическими функциями расстояния, причем волновое число равно

$$\Gamma = \sqrt{\Delta^2 - 4\beta_1^2 U_0^2}. \qquad (30)$$

На основании проведенного рассмотрения пространственных процессов на предельных траекториях можно сделать некоторые выводы о протяженности пространственных биений в общем случае.

В случае $|\Delta| < 2\beta_1 U_0$ наименьшим периодом пространственных биений из семейства траекторий, ограниченных сепаратрисами, обладают траектории, непосредственно окружающие центровые особые точки. Волновые числа процесса биений в этом случае определяются соотношениями (21) и (23). При переходе от траектории к траектории по направлению от центровой точки к сепаратрисе период биений увеличивается до значений порядка (27) для траекторий, близких к сепаратрисе. В узкой окрестности самой сепаратрисы пространственный период увеличивается сильнее, приближаясь логарифмически к бесконечности при подходе к сепаратрисе.

Зависимость периода биений от амплитуды в случае $|\Delta| > 2\beta_1 U_0$ на траекториях вокруг центровой особой точки также является монотонно возрастающей. Если в окрестности центра период определяется соотношением (23), то на ограничивающей интегральной кривой — соотношением (30).

Таким образом, протяженность пространственных биений можно считать качественно выясненной и в общем случае.

---

* Решение (29) в случае $\Delta = 0$ было получено также Б. Оулдом и Г. Кайно (Стенфордский университет, США). Автор пользуется случаем выразить им благодарность за интересную дискуссию по этому решению.

4. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ НА ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ

Выше рассматривалась система в отсутствие затухания. Общий случай учетом влияния диссипации энергии в системе, когда коэффициенты затухания δ_1 и δ_2 различны и находятся в произвольном соотношении с оэффициентами связи β_1 и β_2, можно проанализировать только при помощи численного интегрирования уравнений (6) и (10). Аналитическим нованием этого является отсутствие интеграла энергии типа (13). Таой интеграл существует только в том случае, если коэффициенты затухания δ_1 и δ_2 равны между собой:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta. \tag{31}$$

огда интеграл энергии приобретает вид

$$\beta_1 (x^2 + y^2) + \beta_2 w = \beta_1 U_0^2 e^{-2\delta z}. \tag{32}$$

Однако и в этом случае, по-видимому, проанализировать поведение стемы иным путем, чем на основе численного интегрирования, можно лько в случае полного равенства парциальных фазовых скоростей основй составляющей волнового поля и ее второй гармоники ($\Delta = 0$). Для го чтобы показать это, рассмотрим уравнения, определяющие поведе-ие системы, аналогичные (14). Они имеют вид

$$\dot{x} = -\delta x + \Delta y - \beta_1 x^2 - 3\beta_1 y^2 + \beta_1 U_0^2 e^{-2\delta z}, \quad \dot{y} = -\delta y - \Delta x + 2\beta_1 xy. \tag{33}$$

водя новые безразмерные амплитуды X и Y согласно соотношениям

$$x = XU_0 e^{-\delta z}, \; y = YU_0 e^{-\delta z} \tag{34}$$

новый аргумент — безразмерное приведенное расстояние Z при помощи отношения

$$Z = \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}(1 - e^{-\delta z}), \tag{35}$$

жно свести систему уравнений (33) к виду

$$X' = \frac{\Delta}{2(\beta_1 U_0 - \delta Z)} Y - \frac{1}{2} X^2 - \frac{3}{2} Y^2 + \frac{1}{2}, \quad Y' = -\frac{\Delta}{2(\beta_1 U_0 - \delta Z)} X + XY, \tag{36}$$

е штрих обозначает дифференцирование по приведенному расстоянию Z.

Система уравнений (36), обладая с первого взгляда видом системы (14), щественно от нее отличается. Это отличие заключается в зависимости эффициентов при линейных членах в правых частях от аргумента. одобное обстоятельство не позволяет использовать метод качественго интегрирования на фазовой плоскости XY, что было сделано по отношению к системе (14). Единственно возможный случай для анализа — случай $\Delta = 0$, к рассмотрению которого мы и переходим.

Уравнения (36) в случае $\Delta = 0$ приобретают вид

$$2X' = -X^2 - 3Y^2 + 1, \quad Y' = XY, \tag{37}$$

торый является безразмерной формой (14) при $\Delta = 0$. На рис. 1, *а* ображены интегральные кривые в этом случае на плоскости XY. Период ращения изображающей точки по замкнутым интегральным кривым еет порядок единицы в масштабе приведенного расстояния Z.

Выясним смысл приведенного расстояния Z (соотношение (35)).

Если затухание в системе отсутствует ($\delta = 0$), то приведенное расстояе пропорционально истинному расстоянию от входа системы, причем спитабным множителем является параметр нелинейности $\beta_1 U_0$. До тех р пока Z мало, нелинейностью в системе вообще в этом случае можно енебречь. Она начинает проявляться лишь при значениях Z, сравнимых единицей.

В случае $\delta \neq 0$ приведенное расстояние связано нелинейной зависимостью с истинным расстоянием от входа; при бесконечном увеличении расстояния от входа оно остается конечным. Существенно различаются два случая: $2\beta_1 U_0 \gg \delta$ и обратный случай. Первый случай соответствует положению, когда затухание сказывается слабо на расстояниях, где нелинейность уже играет роль. Приведенное расстояние на достаточно больших

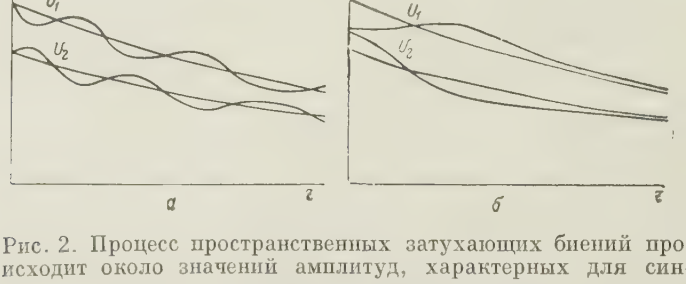


Рис. 2. Процесс пространственных затухающих биений происходит около значений амплитуд, характерных для синхронных режимов:

а — случай малых затуханий $\delta \ll 2\beta_1 U_0$; *б* — случай значительных затуханий $\delta > 2\beta_1 U_0$

расстояниях от входа системы может иметь очень большое значение. Второй случай, наоборот, осуществляется, когда нелинейность проявляется слабо. Параметр Z при этом мал на любом расстоянии от входа.

Таким образом, приведенное расстояние Z характеризует степень проявления нелинейных свойств системы: если оно сравнимо с единицей или больше ее, нелинейность проявляется в сильной степени, если оно мало — в слабой.

Из изложенного следует, что только в случае $2\beta_1 U_0 \gg \delta$ изображающая точка на фазовой плоскости XY может описать несколько вращений по замкнутой траектории, стремясь в конце концов к какой-то определенной точке на ней, характеризуемой Z_∞:

$$Z_\infty = \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}. \tag{38}$$

В случае большого затухания $\delta \gg 2\beta_1 U_0$ изображающая точка совершает лишь небольшую дугу по траектории, характеризуемую интервалом Z (38).

Следует специально отметить, что пространственный период биений с расстоянием увеличивается, что является следствием нелинейной зависимости приведенного расстояния от истинного. При достаточно большом затухании уже второй, и даже первый, «период» может растянуться до бесконечности (рис. 2, *б*).

В рассматриваемом случае, так же как и в случае отсутствия затухания, существуют синхронные режимы, синфазный и антифазный, которые характеризуются решениями

$$U_1 = \sqrt{\frac{2\beta_2}{3\beta_1}}\, U_0 e^{-\delta z},\quad U_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}\, U_0 e^{-\delta z} \tag{39}$$

и вокруг которых могут иметь место колебания амплитуд и фазы — затухающие биения (рис. 2).

Так же как и в случае отсутствия затухания, движение по интегральным кривым, сепаратрисам, энергетически ограничивающим возможные состояния, можно описать аналитически. Одна из таких кривых характеризуется равенством нулю амплитуды основной составляющей $U_1 = 0$. В этом случае

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{40}$$

уравнения (37) легко интегрируются. В результате амплитуды второй гармонической составляющей x и y описываются выражениями

$$x = -U_0 e^{-\delta z} \operatorname{th} \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}(e^{-\delta z_0} - e^{-\delta z}),\quad y = \pm \frac{U_0 e^{-\delta z}}{\operatorname{ch} \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}(e^{-\delta z_0} - e^{-\delta z})}, \qquad (41)$$

где z_0 — расстояние, характеризуемое прохождением амплитуды x через нуль.

Движение по другой сепаратрисе, уравнение которой

$$Y = 0, \qquad (42)$$

также можно описать аналитически. Подставляя (42) в уравнения (37) и интегрируя, имеем

$$x = U_0 e^{-\delta z} \operatorname{th} \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}(e^{-\delta z_0} - e^{-\delta z}),\quad U_1 = \frac{\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\, U_0 e^{-\delta z}}{\operatorname{ch} \frac{2\beta_1 U_0}{\delta}(e^{-\delta z_0} - e^{-\delta z})}. \qquad (43)$$

Графики, изображающие зависимости (41) и (43), представлены на рис. 3. Граничные условия выбраны в них вблизи седловой точки, из которой исходит движение.

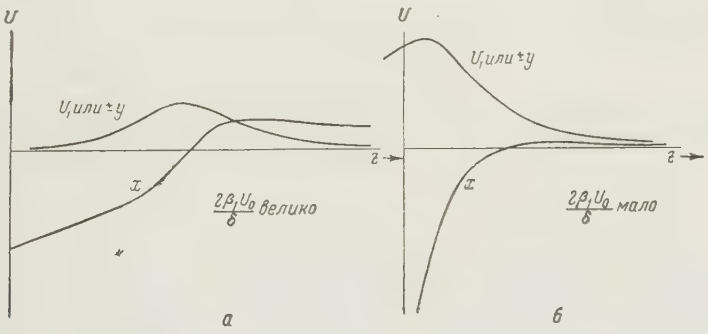


Рис. 3. Изменение амплитуд гармонических составляющих с расстоянием в случае движения по сепаратрисам:
а — затухание мало; *б* — затухание велико

Рассмотрение графиков показывает, что если в случае малых затуханий (рис. 3, *а*) движение по сепаратрисе приводит к параметрически неустойчивому состоянию (при $z \to \infty$ $|x| \gg U_1$), то в случае больших затуханий (рис. 3, *б*) движение по сепаратрисе приводит к устойчивому состоянию и может быть реализовано практически.

Из рассмотрения результатов этого параграфа следует, что и в общем случае различных, но малых коэффициентов затухания, затухание мало сказывается на расстояниях порядка одного периода биений. Поэтому представляет интерес на основе разумного приближения проанализировать другой крайний случай, когда по крайней мере один из коэффициентов затухания велик.

5. СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО ЗАТУХАНИЯ В ЛИНИИ

Так как в практических случаях затухание на частоте гармоники больше, чем затухание основной составляющей, в этом параграфе рассмотрен случай, который может представить интерес, когда коэффициент затухания δ_2 велик:

$$\delta_2 \gg \beta_{1,2} U_0, \qquad (44)$$

а коэффициент δ_1 небольшой и имеет порядок правой части (44).

В этом случае уравнения, аналогичные (12), описывающие волновые процессы в системе,

$$\dot{w} = -2\delta_1 w - 2\beta_1 wx, \quad \dot{x} = -\delta_2 x + \beta_2 w + \Delta y - 2\beta_1 y^2,$$
$$\dot{y} = -\delta_2 y - \Delta x + 2\beta_1 xy \qquad (45)$$

могут быть упрощены, и решения их проанализированы. Приступая к такому упрощению, отметим, что наиболее интересная область рассогласования фазовых скоростей имеет порядок $\Delta \approx \beta_{1,2} U_0$. Интересуясь этой областью, в правых частях второго и третьего уравнений системы (45) можно пренебречь нелинейными членами и членами, пропорциональными Δ. Тогда имеем

$$\dot{w} = -2\delta_1 w - 2\beta_1 wx,$$

$$\dot{x} = -\delta_2 x + \beta_2 w, \; \dot{y} = -\delta_2 y. \qquad (46)$$

Уравнение для составляющей y при этом отщепляется. Это означает, что в случае сильного затухания на частоте гармоники параметричекая взаимосвязь основной составляющей осуществляется только с составляющей гармоники x. Уравнения, описывающие волновой процесс, сильно упрощаются.

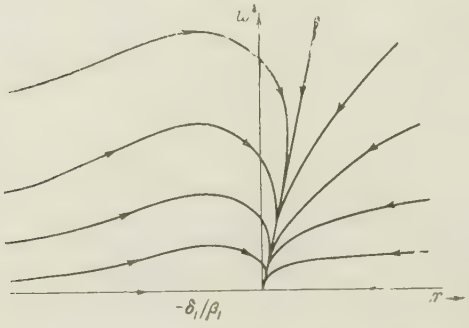


Рис. 4. Картина поведения интегральных кривых уравнения (47)

Проще всего проанализировать общие свойства решений системы первых двух уравнений (46) путем качественного интегрирования на плоскости xw. Разделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{dx}{dw} = \frac{\delta_2 x - \beta_2 w}{2w(\delta_1 + \beta_1 x)}. \qquad (47)$$

Следует помнить, что координата w в силу ее определения может быть только положительной. По уравнению (47) легко можно построить фазовые портреты движений (рис. 4). Все интегральные кривые вливаются в кривую, характеризующую плавное изменение с пространственным масштабом $1/2\ \delta_1$ и соответствующую определенным граничным условиям на входе. Для того чтобы получить ее уравнение, надо предположить медленность изменения x и пренебречь во втором уравнении (46) членом $\dot{x}$ по сравнению с $\delta_2 x$. Полученное таким образом приближенное уравнение этой интегральной кривой имеет вид

$$y \simeq \frac{\beta_2}{\delta_2} w. \qquad (48)$$

Скорость приближения изображающих точек по основным интегральным кривым к кривой (48) значительно выше скорости изменения по кривой (48) и характеризуется пространственным масштабом $1/\delta_2$.

По фазовой картине движений может быть установлен общий характер взаимодействия основной и второй гармонических составляющих при различных граничных движениях на входе системы.

Из рис. 4 видно, что если на вход поданы мощный сигнал двойной частоты и слабый сигнал основной частоты, этот слабый сигнал при определенных фазовых соотношениях ($x_0 < 0$, т. е. $\sin \Phi < 0$) усиливается, достигает максимума на расстоянии от входа порядка

$$z_m = \frac{1}{\delta_2} \ln \frac{\beta_1 x_0}{2\delta_1} \qquad (49)$$

и затем падает с увеличением расстояния от входа. Необходимо отметить, что максимально возможное усиление основной составляющей при этом очень невелико и не превосходит нескольких децибел.

Если на вход системы, наоборот, подано напряжение только основной оставляющей, она быстро возбуждает вторую гармонику, которая на асстоянии порядка $1/\delta_2$ достигает максимума, равного по порядку

$$x_m \simeq \frac{\beta_2 w_0}{\delta_2}, \qquad (50)$$

затем медленно падает по экспоненциальному закону с показателем δ_1.

Таким образом, все возможные возбуждения составляющих волнового оля происходят на расстояниях от входа порядка $1/\delta_2$, после чего амплиуды медленно уменьшаются с характерным масштабом изменения, равным $12\delta_1$.

ВЫВОДЫ

При распространении волн в сильнодиспергирующей линии с нелинейными распределенными параметрами между различными гармоническими оставляющими возникает параметрическая связь. В случае, близком к инхронизму между основной и второй гармоническими составляющими, оторому посвящена работа, эта связь приводит вообще к пространственым энергетическим биениям между составляющими. В случае равных атуханий составляющих существуют выделенные синхронные стационарные состояния, в которых энергетические биения между основной и торой гармоническими составляющими волны отсутствуют. Таких состояний может быть одно или два в зависимости от величины рассогласования в парциальных фазовых скоростях составляющих: при малом расогласовании их два, а при достаточно большом — одно. В случае равенства парциальных фазовых скоростей мощность, переносимая основной оставляющей, в обоих синхронных состояниях в два раза больше мощности, переносимой гармоникой.

Факт наличия двух стационарных состояний можно использовать ля создания параметров на бегущей волне — новых элементов памяти ля быстродействующих вычислительных машин. Время переброса их из дного стационарного состояния в другое можно существенно уменьшить о сравнению с параметронами резонансного типа.

Энергетические биения происходят около значений амплитуд и фаз, арактерных для стационарных синхронных состояний. Диссипация нергии в системе приводит не только к затуханию волнового процесса, о и к увеличению периода биений, причем это увеличение растет с растоянием от входа. В конце концов один из периодов оказывается последим — он растягивается до бесконечности. Процесс энергетических биений имеет место и в случае сильного затухания, хотя амплитуда биений ри этом мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Tien, H. Suhl, A travelling-wave ferromagnetic amplifier, Proc. I.R.E., 1958, **46**, 4, 700.
2. P. K. Tien, Parametric amplification and frequency mixing in propagation circuits, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 9, 1347.
3. A. L. Cullen, Theory of travelling-wave parametric amplifier, Nature, 1958, **181**; 332; Proc. I. E. E., 1960, **107B**, 32, 101.
4. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, К теории ударных электромагнитных волн в нелинейных средах, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 1, 79.
5. R. Landauer, Parametric amplification along non-linear transmission lines, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 3, 479.
6. Р. В. Хохлов, К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 6, 917.
7. А. А. Витт, Г. С. Горелик, Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем, ЖТФ, 1933, 3, 2—3, 294.
8. Р. В. Хохлов, К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы, Докл. АН СССР, 1954, **47**, 3, 411.

Поступила в редакцию
15 VIII 1960

1961 № 7

РАСЧЕТ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ВОЛН В ИСКУССТВЕННОМ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИКЕ С УЧЕТОМ ГАРМОНИК ТОКА НА ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ

Л. С. Бенсон

Приведен вывод обобщенного характеристического уравнения для расчета фазовой скорости волн в искусственном металлодиэлектрике, пригодного в общем случае произвольного распределения тока на элементах структуры.

Рассчитаны поправки к фазовой скорости волн в системе бесконечных стержней, обусловленные влиянием первой гармоники тока.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] показано, что для расчета фазовой скорости волн в искусственном металлодиэлектрике можно применять метод наведенных эдс. Вывод характеристического уравнения и его анализ в [1] были проиллюстрированы на примере структур, элементами которых являются тонкие цилиндрические стержни. Для упрощения расчета предполагалось, что токи, текущие на поверхности стержней, имеют только одну осевую составляющую, а их распределение описывается известной вещественной функцией, постоянной по сечению стержня. Вследствие этого практическое применение уравнения (32), полученного в [1], ограничено случаем тонких стержней и относительно больших периодов структуры, когда это предположение является справедливым.

Целесообразно вывести обобщенное характеристическое уравнение, пригодное в общем случае произвольного распределения тока на стержнях. Это дает возможность, в частности, установить пределы практической применимости простого уравнения (32) из [1]. Рассмотрим эту задачу, ограничиваясь, как и в [1], случаем распространения волн лишь вдоль одной из осей структуры (обобщение на случай произвольного направления распространения можно без труда выполнить методом, изложенным в [2]). Это позволит в дальнейшем вместо трехмерной структуры рассматривать эквивалентную структуру в виде одномерной решетки, расположенной в прямоугольном волноводе с двумя металлическими и двумя идеально магнитопроводящими стенками; ось волновода совпадает с той осью решетки, вдоль которой распространяется волна (ось z) (см. рисунок).

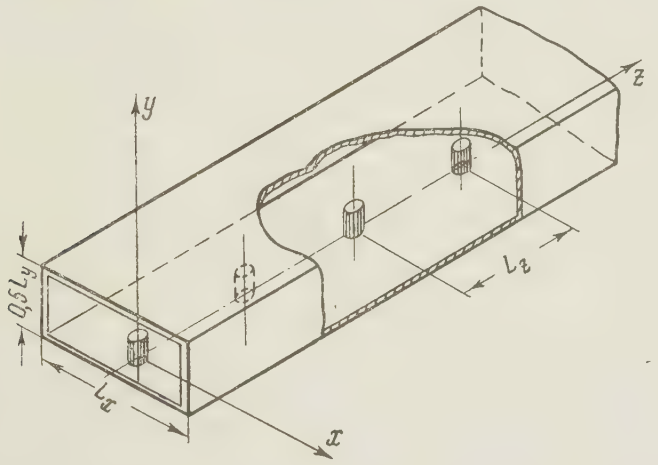
При решении поставленной задачи в принципе можно идти двумя путями. Первый путь заключается в том, что токи, текущие на поверхности элементов структуры, представляются в виде суперпозиции ортогональных функций, причем коэффициенты суперпозиции, вообще говоря, не известны. Это дает возможность аппроксимировать произвольное распределение тока с любой степенью точности, зависящей от взятого числа аппроксимирующих функций, а следовательно, получить с высокой точностью значение фазовой скорости. Второй путь заключается в том, что распределение тока в элементах структуры принимается известным и совпадающим с распределением, найденным в результате предварительного решения какой-либо более простой задачи. Очевидно, это совпадение может быть только приближенным. Однако и в первом случае речь может идти лишь о приближенной аппроксимации распределения тока, поскольку решение характеристического уравнения реально осуществимо лишь при небольшом числе аппроксимирующих функций. Ниже рассмотрены оба эти пути.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНО

Пусть в соответствии с вышесказанным токи $\vec{K}$, текущие на поверхности элементов структуры, представлены в виде суперпозиции вещественных функций $\vec{\psi}_j$, образующих на этой поверхности полную ортогональную систему. Тогда для n-го элемента можно написать

$$\vec{K}_n = e^{-ihnL_z} \sum_j a_j \vec{\psi}_j, \tag{1}$$

где L_z — период решетки по оси эквивалентного волновода; h — искомая фазовая постоянная волны в структуре; a_j — амплитуды токовых гармоник.



Полное поле, создаваемое всеми элементами одномерной решетки в эквивалентном волноводе, равно

$$\vec{E}\{\vec{K}\} = \sum_n \vec{E}\{\vec{K}_n\} = \sum_{n,\,j} e^{-ihnL_z} a_j \vec{E}_n\{\vec{\psi}_j\}, \tag{2}$$

где $\vec{E}_n\{\vec{\psi}_j\}$ означает поле, порожденное током $\vec{\psi}_j$, распределенным на n-м элементе, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности эквивалентного волновода.

На поверхности s_n каждого элемента структуры выполняется граничное условие

$$\vec{E}_{кас}\{\vec{K}\} = 0. \tag{3}$$

Тогда, умножая (3) на $\vec{\psi}_p$ и интегрируя по поверхности произвольного, например нулевого (т. е. находящегося вблизи начала координат), элемента структуры, получим с учетом (2) систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных амплитуд a_j:

$$\sum_j a_j \left(\sum_n e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,pj} \right) = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где

$$Z_{0n,\,pj} = -\frac{1}{T^2} \int_{s_0} \vec{\psi}_p \vec{E}_n\{\vec{\psi}_j\}\, ds \tag{5}$$

— сопротивление, наведенное током $\vec{\psi}_j$, распределенным на n-м элементе, током $\vec{\psi}_p$, распределенным на нулевом элементе (с поверхностью s_0); T —

размерный делитель, равный периметру поперечного сечения элемента структуры, введенный для того, чтобы определение наведенного сопротивления совпадало с общепринятым. Условием существования нетривиальных решений системы (4) является равенство нулю детерминанта системы (4):

$$\begin{vmatrix} A_{00}, & A_{10}, \ldots \\ A_{01}, & A_{11}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0, \tag{6а}$$

где

$$A_{pj} = \sum_n e^{-ihnL_z} Z_{0n,\ pj}. \tag{6б}$$

Выражение (6а) и представляет собой искомое характеристическое уравнение для определения фазовой постоянной h волн в структуре. Если распределение тока достаточно хорошо описывается одной функцией, то (6а) примет вид

$$A_{00} \equiv \sum_n e^{-ihnL_z} Z_{0n,\ 00} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) совпадает с уравнением (15), полученным в [1]. Выражение (6а) является, таким образом, обобщением (15) на случай произвольного заранее неизвестного распределения тока на элементах структуры и представляет собой, вообще говоря, бесконечный детерминант, так как (1) — бесконечный ряд. Однако поскольку аппроксимация распределения тока на элементе структуры с нужной для практики точностью обеспечивается при конечном числе функций $\vec{\psi}_j$ в (1), то детерминант (6а) будет практически детерминантом 2—4-го порядка, и его решение не представит принципиальных трудностей. Последнее можно значительно упростить, если учесть, что в большинстве случаев уже в нулевом приближении (когда (6а) сводится к (7)) значение $h = h_0$ оказывается довольно близким к истинному и использование (7) необходимо, таким образом, лишь для вычисления поправки к h_0. Решение (6а) может быть осуществлено методом последовательных приближений. Разлагая (6а) по элементам первой строки (или столбца) и перенося в правую часть все члены, за исключением первого, запишем (6а) в виде

$$A_{00}(h) = -\frac{\sum_{k=1}^{N} A_{0k}(h) B_{0k}(h)}{B_{00}(h)}. \tag{8}$$

Здесь B_{ik} — алгебраическое дополнение элемента A_{ik}. Нулевое приближение $h = h_0$ получим, решая (8) при отбрасывании правой части, т. е. уравнение

$$A_{00}(h) = 0. \tag{9}$$

Поправку к $h = h_0$ найдем, решая (8) при подстановке в правую часть $h = h_0$, т. е. из уравнения

$$A_{00}(h) = -\frac{\sum_{k=1}^{N} A_{0k}(h_0) B_{0k}(h_0)}{B_{00}(h_0)}, \tag{10}$$

и так далее.

Так как в (9) в виде свободного члена входит величина $X_{00,00}$ — реактивное сопротивление излучения элемента структуры (см., например, (30) из [1]), решение уравнения (10) совпадает с решением (9), но при

правленном значении $X_{00,00}$, равном

$$X'_{00,\,00} = X_{00,\,00} + \frac{\sum_{k=1}^{N} A_{0k}(h_0)\,B_{0k}(h_0)}{B_{00}(h_0)}. \qquad (11)$$

евидно, если имеются подробные графики $h_0 = f(X_{00,00})$, то h_1 найдем них как $h_1 = f(X'_{00,00})$.

Аналогично вычисляются и последующие приближения.

Для дальнейшего анализа уравнения (6а) преобразуем выражения) к более удобному виду. Введем

$$f_m^{(j)} = \frac{1}{T}\int_{S_0} \vec{\psi}_j \vec{E}_m\, ds \qquad (12)$$

интегральную эдс, обусловленную m-й собственной волной эквива-тного волновода и действующую на j-е распределение тока на нулевом ржне. Поле, возбуждаемое элементом структуры, представим в виде ложения по собственным волнам эквивалентного волновода:

$$\vec{E}_n\{\vec{\psi}_j\} = \begin{cases} \sum_m C_m^{(nj)} \vec{E}_m, & z > z_n + a, \\ \sum_m C_{-m}^{(nj)} \vec{E}_{-m}, & z < z_n - a, \end{cases} \qquad (13)$$

$$C_{\pm m}^{(nj)} = \frac{1}{N_m} f_{\mp m}^{(j)} e^{\pm i\gamma_m z_n}; \quad N_m = \int_{S_\perp} \{[\vec{E}_m \vec{H}_{-m}] - [\vec{E}_{-m}\vec{H}_m]\}\,\vec{i}_z\, dS; \qquad (14)$$

— координата центра n-го стержня; a — его радиус; $S_\perp$ — поперечное сечение волновода; m — индекс (один или несколько) типа собственной волны (положительный). Индексом — m обозначена встречная волна а m (для которой постоянная распространения $\gamma_{-m} = -\gamma_m$) *. Исполь- (12) — (14), получим для $Z_{0n,\,pj}$ при $n \neq 0$:

$$Z_{0n,\,pj} = \begin{cases} -\sum_m \frac{1}{N_m} f_{-m}^{(j)} f_m^{(p)} e^{-i\gamma_m |n| L_z}, & n > 0, \\ -\sum_m \frac{1}{N_m} f_m^{(j)} f_{-m}^{(p)} e^{-i\gamma_m |n| L_z}, & n < 0. \end{cases} \qquad (15)$$

ичина $Z_{00,\,pj} = R_{00,\,pj} + iX_{00,\,pj}$ не выражается столь просто. Однако для ественной ее части $R_{00,\,pj}$, равной удвоенной активной взаимной мощ-ги излучения токов $\vec{\psi}_j$ и $\vec{\psi}_p$, найдем, учитывая (13) и (14):

$$R_{00,\,pj} = \mathrm{Re}\int_{S_{\perp 1}+S_{\perp 2}} [\vec{E}_0\{\vec{\psi}_j\}\,\vec{H}_0^*\{\vec{\psi}_p\}]\,d\vec{S} = \sum_m \frac{2P_m}{|N_m|^2}\{f_m^{(j)} f_m^{(p)*} + f_{-m}^{(j)} f_{-m}^{(p)*}\}, \qquad (16)$$

$S_{\perp 1}$ и $S_{\perp 2}$ — поперечные сечения эквивалентного волновода, слева и ава от нулевого элемента; $P_m = \frac{1}{2}\int_{S_{\perp 1}} [\vec{E}_m \vec{H}_m^*]\,d\vec{S} = \frac{1}{2}\int_{S_{\perp 2}} [\vec{E}_{-m}\vec{H}_{-m}^*]\,d\vec{S}$ —

ность, переносимая вдоль оси волновода собственными волнами ин-са m (в направлении $z > 0$) и $-m$ (в направлении $z < 0$); суммиро-ие в (16) идет только по распространяющимся (при данных размерах новода) волнам. Пусть волны индекса $\pm m$ нормированы так, что

* См. [3] (81.01) и [4] (XV. 26).

для распространяющихся волн

$$\vec{E}_m = \vec{E}^*_{-m}, \quad \vec{H}_m = -\vec{H}^*_{-m}. \tag{17}$$

Тогда для этих волн

$$N_m = -4P_m, \quad f_{-m} = f^*_m \tag{18}$$

и

$$R_{00,\,pj} = -\sum_m \frac{1}{2N_m}\{f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m} + f^{(j)}_{-m} f^{(p)}_m\}. \tag{19}$$

Используя (15) и (19) и суммируя получающиеся геометрические прогрессии, найдем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,pj} = iX_{00,\,pj} + i\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{f^{(j)}_{-m} f^{(p)}_m}{2N_m}\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma_m - h}{2}L_z\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m}}{2N_m}\operatorname{ctg}\left(\frac{\gamma_m + h}{2}L_z\right)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{m>t}\frac{f^{(j)}_{-m} f^{(p)}_m + f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m}}{N_m}, \tag{20}$$

где t — число распространяющихся типов волн. Функции f могут быть как четными:

$$f^{(j)}_{-m} = f^{(j)}_m, \tag{21а}$$

так и нечетными:

$$f^{(j)}_{-m} = -f^{(j)}_m \tag{21б}$$

относительно оси z. Если $f^{(j)}_{-m}$ и $f^{(p)}_{-m}$ удовлетворяют одновременно одному и тому же из условий (21), то (20) примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,pj} = iX_{00,\,pj} + i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m}}{N_m}\frac{\sin\gamma_m L_z}{\cos hL_z - \cos\gamma_m L_z} +$$
$$+ \sum_{m>t}\frac{f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m}}{N_m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,jp}. \tag{22а}$$

Если же $f^{(j)}_{-m}$ и $f^{(p)}_{-m}$ удовлетворяют различным условиям (21), то учитывая, что в этом случае $X_{00,\,pj} \equiv R_{00,\,pj} \equiv 0$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,pj} = -i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}_m f^{(p)}_{-m}}{N_m}\frac{\sin hL_z}{\cos hL_z - \cos\gamma_m L_z} =$$
$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,\,jp}. \tag{22б}$$

Элементы A_{pj} детерминанта (6а) будут, очевидно, иметь вид (22а) при $j + p$ — четном и (22б) — при $j + p$ — нечетном.

Выражения (22) удобны для практических расчетов и могут непосредственно использоваться при вычислении (6а). Следует отметить, что, как видно из (22а), в уравнение (6а) будут входить в качестве параметров величины $X_{00,\,pj}$ — собственные и взаимные реактивные сопротивления токовых гармоник элемента структуры. Они полностью определяются геометрией структуры и, вообще говоря, известны. Однако целесообразно, поступая так же, как и при решении (32) из [1], рассматривать $X_{00,\,00}$ как независимый параметр. Тогда, без труда разрешив (6а) относительно $X_{00,\,00}$, можно найти $X_{00,\,00}$ как функцию h. Обращая эту функцию, получим $h = h(X_{00,\,00})$; учитывая зависимость $X_{00,\,00}$ от геометрии структуры, найдем искомую связь между последней и величиной h, т. е. решение характеристического уравнения. В отличие от изложенного выше метода последовательных приближений, это дает точное решение (6а) (при заданном числе аппроксимирующих функций ψ_p).

Рассмотрим конкретный пример структуры, состоящей из бесконеч-
стержней, параллельных оси y. Прежде всего отметим, что если токи
элементах структуры имеют лишь y-составляющие (а это для бесконеч-
стержней выполняется точно), то полная система собственных волн
квивалентном волноводе описывается вектором Герца $\vec{\Pi}_e = \Pi_{ey}\vec{i}_y$.
да совместная с (17) связь полей $\vec{E}_m$ и $\vec{E}_{-m}$ имеет вид

$$\vec{E}_{-m} = \vec{E}_{-m}e^{2i\gamma_m z} \tag{23}$$

волн как распространяющихся, так и затухающих типов.
Так как мы рассматриваем случай, когда волны в структуре распро-
няются лишь в направлении оси z, то функции ψ_p, очевидно, должны
ь четными относительно осей y и z; относительно оси x они могут быть
четными, так и нечетными. В первом случае справедливо (21а), во
ром — (21б).
Пусть $\psi_p = \cos p\varphi$ (φ отсчитывается от оси x). Полагая

$$= \frac{1}{k^2}\cos\frac{2m\pi x}{L_x}e^{-i\gamma_m z},\ E_y = k^2\Pi_y,\ H_x = -\frac{k\gamma_m}{Z_0}\Pi_y,\ \gamma_m = k\sqrt{1-\left(\frac{2m\pi}{kL_x}\right)^2}, \tag{24}$$

цем

$$\frac{N_m}{N_0} = \frac{\gamma_m}{2k},\ f_m^{(p)} = i^{-p}J_p(ka)\cos\left(\operatorname{parc}\cos\frac{\gamma_m}{k}\right) = i^{-p}J_p(ka)\,T_p\left(\frac{\gamma_m}{k}\right),$$

$$f_{-m}^{(p)} = (-1)^p f_m^{(p)}, \tag{25}$$

$T_p\left(\frac{\gamma_m}{k}\right)$ — полином Чебышева.

Для затухающих волн $\gamma_m = -i\alpha_m$, $\alpha_m = k\sqrt{\left(\frac{2m\pi}{kL_x}\right)^2 - 1}$; исполь-
выражение

$$T_p(z) = \frac{1}{2}\{[z + i\sqrt{1-z^2}]^p + [z - i\sqrt{1-z^2}]^p\},$$

цем для $f_m^{(p)}$:

$$= \frac{1}{2}J_p(ka)\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2+1} - 1\frac{\alpha_m}{k}\right]^p + (-1)^p\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2+1} + \frac{\alpha_m}{k}\right]^p\right\}. \tag{26}$$

Пусть распространяющейся является лишь одна волна TEM, для
рой $\gamma_m = \gamma_0 = k$. При этом выражения (22), с учетом (25) и (26),
ут вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z}Z_{0n,pj} = iR_{00,00}\left\{\frac{X_{00,pj}}{R_{00,00}} - (-1)^p\frac{J_j(ka)\,J_p(ka)}{J_0^2(ka)}\times\right.$$

$$\times\left[i^{-p-j}\frac{\sin kL_z}{\cos hL_z - \sin kL_z} + \sum_{m\geqslant 1}\frac{k}{2\alpha_m}\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2+1} - \frac{\alpha_m}{k}\right]^p +\right.\right.$$

$$-(-1)^p\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2+1} - \frac{\alpha_m}{k}\right]^p\left\}\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2-1} - \frac{\alpha_m}{k}\right]^j\right.\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^j\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2-1} - \frac{\alpha_m}{k}\right]^j\right\}\left\{1 + \frac{\operatorname{sh}\alpha_m L_z}{\cos hL_z - \operatorname{ch}\alpha_m L_z}\right\}\right] \tag{27а}$$

при $p+j$ — четном,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ihnL_z} Z_{0n,pj} = iR_{00,00}\left\{ i^{p-j} \frac{J_j(ka)\,J_p(ka)}{J_0^2(ka)} \frac{\sin hL_z}{\cos hL_z - \cos kL_z} + \right.$$

$$+ i(-1)^p \sum_{m\geqslant 1} \frac{k}{2\alpha_m} \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2 + 1} - \frac{\alpha_m}{k} \right]^p + (-1)^p \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2 + 1} + \frac{\alpha_m}{k} \right]^p \right\}$$

$$\times \left\{ \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2 + 1} - \frac{\alpha_m}{k} \right]^j + (-1)^j \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2 + 1} + \frac{\alpha_m}{k} \right]^j \right\} \frac{\sin hL_z}{\cos hL_z - \operatorname{ch} \alpha_m L_z} \quad (2$$

при $p+j$ — нечетном.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЭЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРЫ ЗАДАНО ПРИБЛИЖЕННО

В этом методе наиболее естественно задать распределение тока соответствующим с распределением тока в одиночном элементе, помещенном в эквивалентный волновод, возбуждаемый волной TEM (или, что полностью эквивалентно, в элементе двумерной решетки стержней, на которую нормально падает плоская волна). При этом учитываем влияние на распределение тока в стержне стенок эквивалентного волновода и пренебрегаем лишь влиянием высших типов волн, возбуждаемых соседними (вдоль оси волновода) элементами структуры. Распределение тока будет по-прежнему иметь вид (1), но коэффициенты a_j нужно предварительно найти из системы линейных уравнений метода наведенных эдс:

$$\sum_j a_j Z_{00,pj} = \frac{f_0^{(p)}}{T}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \quad (7$$

где $Z_{00,pj}$ и $f_0^{(p)}$ определены прежними формулами (5) и (12). Так как распределение тока теперь известно, то характеристическое уравнение следует получить несколько иначе, а именно: умножая (3) не на отдельные функции ψ_p, а на $\psi^* = \sum_p \alpha_p^* \psi_p$, $\alpha_p = a_p / a_0$, $\alpha_0 = 1$. Как нетрудно убедиться, при этом получим следующее уравнение:

$$\sum_{p,j} \alpha_j \alpha_p^* \sum_n e^{-ihnL_z} Z_{0n,pj} = 0, \quad (8$$

или, используя для внутренней суммы выражения (22),

$$\frac{\sin kL_z}{\cos hL_z - \cos kL_z} \sum_{j+p=\text{чет.}} \alpha_j \alpha_p^* R_{00,pj} = \sum_{j+p=\text{чет.}} \alpha_j \alpha_p^* (X_{00,pj} + \Delta_1) +$$

$$+ \sum_{j+p=\text{нечет.}} \alpha_j \alpha_p^* \Delta_2, \quad (9$$

где

$$\Delta_1 = \sum_{m\geqslant 1} \frac{f_m^{(j)} f_{-m}^{(p)}}{iN_m} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sh} \alpha_m L_z}{\cos hL_z - \operatorname{ch} \alpha_m L_z} \right\};$$

$$\Delta_2 = -\sum_{m\geqslant 0} \frac{f_m^{(j)} f_{-m}^{(p)}}{N_m} \frac{\sin hL_z}{\cos hL_z - \cos \gamma_m L_z}.$$

Нетрудно убедиться, что $\sum_{j+p=\text{чет.}} \alpha_j \alpha_p^* R_{00,pj} \equiv R_{00}$ и $\sum_{j+p=\text{чет.}} \alpha_j \alpha_p^* X_{00,pj} \equiv$ представляют собой собственные активное (R_{00}) и реактивное (X_{00}) со

тивления стержня в эквивалентном волноводе (или двумерной решетке) при распределении тока $\psi = \sum_p \alpha_p \psi_p$. Уравнение (30) можно решить тем же способом, что и уравнение (32) из [1]. В случае решетки бесконечных стержней, распределение тока в которых описывается выражением

$$\psi = 1 + \alpha_1 \cos \varphi, \tag{32}$$

в соответствии с [5]

$$\alpha_1 = \frac{f_0^{(1)}}{f_0^{(0)}} \frac{Z_{00,00}}{Z_{00,11}}, \quad f_0^{(0)} = J_0(ka), \quad f_{\pm 0}^{(1)} = \mp i J_1(ka),$$
$$R_{00,00} = -\frac{J_0^2(ka)}{N_{TEM}}, \quad R_{00,11} = -\frac{J_1^2(ka)}{N_{TEM}}, \quad \frac{R_{00,11}}{R_{00,00}} = \frac{J_1^2(ka)}{J_0^2(ka)} \simeq \frac{(ka)^2}{2} \ll 1. \tag{33}$$

Члены с $R_{00,11}$ можно отбросить ввиду их малости, а остальные поправочные члены перенести в правую часть (30) для облегчения применения метода последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Расчет фазовых скоростей волн в искусственном металлодиэлектрике, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 3, 417.
2. Л. С. Бененсон, Фазовая скорость волн в анизотропном искусственном металлодиэлектрике при произвольном направлении распространения, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1806.
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1957.
4. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Антенно-фидерные устройства, ч. II, Изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1959.
5. Л. С. Бененсон, Наведенные сопротивления вибратора в волноводе, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 6, 926.

Поступила в редакцию
28 VII 1960

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПИРАЛЬНО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АНТЕНН

В. П. Шестопалов, А. А. Булгаков, Б. М. Булгаков

Описаны теоретические и экспериментальные исследования спирально-диэлектрических антенн. Методом интеграла Кирхгофа определены их диаграммы направленности. Изложены эксперименты по измерению диаграмм направленности и распределения тока вдоль спирально-диэлектрических антенн.

Показано, что увеличение замедления волн в спирально-диэлектрическом волноводе приводит к более направленному излучению энергии в пространство. Внесение диэлектрика в спиральную антенну позволяет уменьшить геометрические размеры ее.

ВВЕДЕНИЕ

Диэлектрическая и спиральная антенны широко известны в технике СВЧ как антенны бегущей волны. Они представляют собой отрезки диэлектрического или спирального волновода, вдоль которых могут распространяться электромагнитные волны с фазовой скоростью $v_ф$, меньшей скорости света c в свободном пространстве. Замедление в бесконечном диэлектрическом волноводе на высоких частотах определяется выражением

$$\frac{c}{v_ф} = \sqrt{\varepsilon},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость вещества волновода. В спиральном волноводе замедление на высоких частотах имеет вид

$$\frac{c}{v_ф} = \frac{1}{\sin\psi},$$

где ψ — угол намотки спирали.

Известно, что продольные размеры спиральной антенны порядка (1—3) λ_0 (где λ_0 — длина волны в свободном пространстве), в то время как диэлектрическая антенна обладает размерами порядка (3—7) λ_0.

В спирально-диэлектрическом волноводе замедление на высоких частотах определяется формулой

$$\frac{c}{v_ф} = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{2}}\,\frac{1}{\sin\psi}.$$

Можно ожидать, что спирально-диэлектрическая антенна будет обладать свойствами, характерными как для спиральной, так и для диэлектрической антенны. В частности, ее геометрические размеры при соответствующем выборе ε и угла намотки спирали ψ должны быть меньше, чем у спиральной и диэлектрической антенн.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Чтобы выяснить, какие типы волн могут распространяться в бесконечном спирально-диэлектрическом волноводе, рассмотрим систему, состоящую из ленточной спирали радиуса a. Ширина ленты δ, угол намотки спирали ψ, ее шаг p. Внутри спирали находится среда с диэлектрической ε_1 и магнитной μ_1 проницаемостями; снаружи — среда с ε_2, μ_2.

Для нахождения дисперсионного уравнения исследуемой системы необходимо решить краевую задачу со следующими граничными условиями

$$E_z^{(1)}|_{r=a} = E_z^{(2)}|_{r=a}, \quad E_\varphi^{(1)}|_{z=a} = E_\varphi^{(2)}|_{r=a},$$
$$(H_z^{(2)} - H_z^{(1)})|_{r=a} = j_\varphi, \quad (H_\varphi^{(1)} - H_\varphi^{(2)})|_{r=a} = j_z, \tag{1}$$

где индексы 1,2 относятся к областям внутри и вне спирали; j_φ, j_z — составляющие поверхностных токов на спирали. Составляющие Фурье для продольных составляющих поля в первой области ($0 \leqslant r \leqslant a$) запишем в виде

$$E_{zn}^{(1)} = A_n^{(1)} I_n(\gamma_n r)\, e^{in\varphi} e^{-i\beta_n z} e^{i\omega t},$$
$$H_{zn}^{(1)} = B_n^{(1)} I_n(\gamma_n r)\, e^{in\varphi} e^{-i\beta_n z} e^{i\omega t}, \tag{2}$$

а во второй области ($r \geqslant a$)

$$E_{zn}^{(2)} = A_n^{(2)} K_n(\gamma_n r)\, e^{in\varphi} e^{-i\beta_n z} e^{i\omega t},$$
$$H_{zn}^{(2)} = B_n^{(2)} K_n(\gamma_n r)\, e^{in\varphi} e^{-i\beta_n z} e^{i\omega t}, \tag{3}$$

где

$$\gamma_n^2 = \beta_n^2 - k^2; \quad k = \varepsilon\mu k_0; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0};$$
$$\beta_n a = \beta_0 a + \frac{2\pi a}{p} n = \beta_0\, a + n \operatorname{ctg} \psi; \tag{4}$$

$I_n(\gamma_n r)$ и $K_n(\gamma_n r)$ — модифицированные функции Бесселя.

Считая, что $\gamma_n^{(1)} \simeq \gamma_n^{(2)} = \gamma_n$ и используя (1), находим

$$A_n^{(2)} = -\frac{i}{I_n'} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \left(\frac{\gamma_n a}{k_2 a}\right) \frac{j_{zn} - \dfrac{n\beta_n a}{(\gamma_n a)^2} j_{\varphi n}}{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{K_n'}{I_n'}},$$

$$A_n^{(1)} = -\frac{i}{I_n'} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \left(\frac{\gamma_n a}{k_2 a}\right) \frac{j_{zn} - \dfrac{n\beta_n a}{(\gamma_n a)^2} j_{\varphi n}}{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{K_n'}{I_n'}} \frac{K_n}{I_n}, \tag{5}$$

$$B_n^{(2)} = \frac{1}{I_n} \frac{j_{\varphi n}}{\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{K_n'}{I_n'}},$$

$$B_n^{(1)} = \frac{1}{I_n}\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{j_{\varphi n}}{\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{K_n'}{I_n'}} \frac{K_n'}{I_n'}.$$

Здесь и в дальнейшем везде опущены аргументы $\gamma_n a$ модифицированных функций Бесселя.

Используя вариационный метод [1—4], который в нашем случае имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (E_{zn}^* j_{zn} + E_{\varphi n}^* j_{\varphi n})|_{r=a} = 0, \tag{6}$$

получим дисперсионное уравнение

$$L(\beta) = 0, \tag{7}$$

где

$$L(\beta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} ij_{sn}^2 \cos\psi \left(\frac{k_2 a}{\gamma_n a}\right) \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\gamma_n a}{k_2 a}\right)^2 \left[\operatorname{tg}\psi - \frac{n\beta_n a}{(\gamma_n a)^2} \right]^2 \frac{\dfrac{K_n}{I_n'}}{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{K_n'}{I_n'}} + \frac{\dfrac{K_n'}{I_n'}}{\dfrac{K_n}{I_n} - \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{K_n'}{I_n'}} \right\}, \tag{8}$$

$$j_{zn} = j_{sn} \sin\psi; \quad j_{\varphi n} = j_{sn} \cos\psi.$$

Распределение тока на ленте спирали можно представить в форме

$$j_{sn} = \frac{\sin\dfrac{\Delta n}{2}}{\dfrac{\Delta n}{2}}, \quad \Delta = \frac{2p}{\pi\delta}. \tag{9}$$

Как известно, в $L(\beta)$ можно выделить резонансный член бесконечной суммы и нерезонансный остаток. Нерезонансную часть $L(\beta)$ представим в виде

$$S = 2\left[\left(\frac{\gamma_0 a}{k_2 a}\right)^2 \operatorname{tg}^2\psi \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{1}{\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2}}\right] \sin\psi \ln\frac{2}{\Delta}. \tag{10}$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = \mu_1 = 1$, $k_2 a = k_0 a$.

Решение дисперсионного уравнения в области нулевого резонанса ($n = 0$) определяется формулами

$$Q(\gamma_0 a) = \operatorname{ctg}^2\psi \frac{(\gamma_0 a) I_1 K_1 + (\gamma_0 a)\sin\psi \ln\dfrac{2}{\Delta}}{\dfrac{\dfrac{K_0}{K_1}}{\varepsilon\dfrac{K_0}{I_0} + \dfrac{K_1}{I_1}} + \dfrac{2}{\varepsilon+1}(\gamma_0 a)\sin\psi\ln\dfrac{2}{\Delta}}, \tag{11}$$

$$(\gamma_0 a)^2 = (\beta_0 a)^2 - (k_0 a)^2, \quad k_0 a = \gamma_0 a \sqrt{\frac{1}{Q(\gamma_0 a)}}, \quad \beta_0 a = \gamma_0 a \sqrt{1 + \frac{1}{Q(\gamma_0 a)}}$$

($\gamma_0 a$ следует брать в пределах $0 \leqslant \gamma_0 a \leqslant 0{,}6$).

В области первого резонанса ($n = -1$)

$$\beta_{-1} a = \frac{-\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \rho\sigma}}{\rho}, \quad ka = \sqrt{(\beta_{-1} a)^2 - (\gamma_{-1} a)^2},$$

$$\tau = \operatorname{tg}\psi\left(\alpha_\varepsilon + \frac{1}{j_s^2}\frac{2}{1+\varepsilon}\sin\psi\ln\frac{2}{\Delta}\right), \quad \rho = \frac{\alpha_\varepsilon}{(\gamma_{-1} a)^2} - \frac{1}{j_s^2}\sin\psi\ln\frac{2}{\Delta} + \alpha_m,$$

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varkappa}{\varepsilon + \varkappa\chi}, \quad \alpha_m = -(\gamma_{-1} a) I_1 K_1, \tag{12}$$

$$\sigma = (\gamma_{-1} a)^2 \alpha_\varepsilon \operatorname{tg}\psi + [(\gamma_{-1} a)^2 \operatorname{tg}^2\psi + 1]\frac{1}{j_s^2}\frac{2}{1+\varepsilon}\sin\psi\ln\frac{2}{\Delta} +$$

$$+ (\gamma_{-1} a)^2\left[\frac{1}{j_s^2}\sin\psi\ln\frac{2}{\Delta} - \alpha_m\right],$$

$$\varkappa = \frac{1}{\dfrac{I_0}{I_1} - \dfrac{1}{\gamma_{-1} a}}, \quad \chi = \frac{K_0}{K_1} + \frac{1}{\gamma_{-1} a} \quad (0 \leqslant \gamma_{-1} a \leqslant 0{,}6).$$

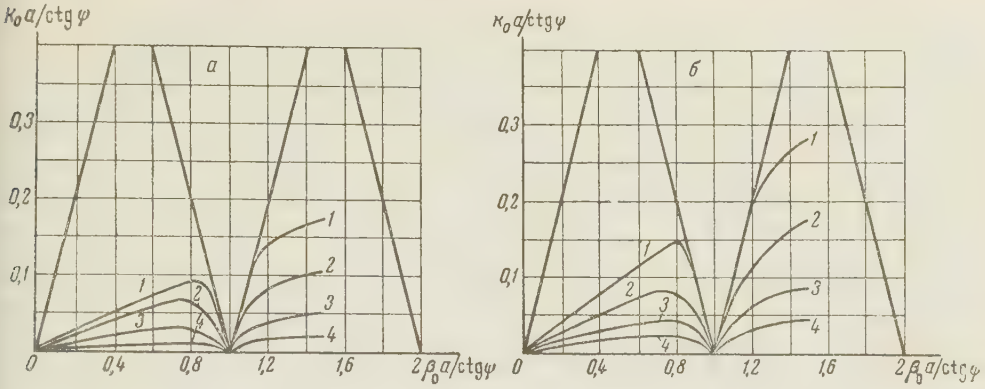


Рис. 1. Дисперсионные кривые спирально-диэлектрического волновода: *а* — ctg $\psi = 8.42$; *б* — ctg $\psi = 5{,}16$ (*1* — $\varepsilon = 1$; *2* — $\varepsilon = 4.5$; *3* — $\varepsilon = 20$; *4* — $\varepsilon = 81$)

На рис. 1, *а*, *б* приведены дисперсионные кривые, построенные согласно (7) — (12). Наличие диэлектрика сильно влияет на фазовую скорость волн в спирально-диэлектрическом волноводе.

2. РАСЧЕТНЫЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Диаграммы направленности спирально-диэлектрической антенны определим, пользуясь методом интеграла Кирхгофа. Поле $\vec{E}_M$ в дальней зоне при этом будет определяться следующим образом:

$$\vec{E}_M = \frac{ie^{-ik_0R}}{k_0R}\int_0^l e^{2\pi iz\left(\frac{\cos\Theta}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_g}\right)}dz\int_0^{2\pi}\vec{V}(\varphi,\Theta,\Phi)\,d\Phi, \tag{13}$$

где λ_g — длина замедленной волны; R — расстояние до точки наблюдения; Θ, φ — углы в сферической системе координат; Φ — азимутальный угол по цилиндрической поверхности антенны; l — длина антенны; $\vec{V}$ от z не зависит. Производя интегрирование в (13) по z, получаем множитель системы, одинаковый для всех антенн бегущей волны,

$$|F_1| = \frac{\sin\left[\frac{k_0a}{2}\frac{l}{a}\left(\frac{\beta_n a}{ka}-\cos\Theta\right)\right]}{\frac{k_0a}{2}\frac{l}{a}\left(\frac{\beta_n a}{ka}-\cos\Theta\right)}. \tag{14}$$

В нашем случае $\frac{k_0a}{2}\frac{l}{a}$ мало и $|F_1(\Theta)|$ весьма близок к синусоиде.

После вычислений, аналогичных [5], находим выражение для полей излучения в дальней зоне

$$\vec{F}_2 = \frac{e^{-ik_0R}}{k_0R}\int_0^{2\pi}\vec{V}(\varphi,\Theta,\Phi)\,d\Phi. \tag{15}$$

Составляющие полей в сферической системе координат имеют вид

$$E_R = 0,$$

$$E_\Theta = \pi \cos\varphi \left\{ A_n^{(2)} K_n(\gamma_n R)\,(J_0 - J_2) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\, B_n^{(2)} K_n(\gamma_n R)\cos\Theta\,(J_0 + J_2) \right.$$
$$\left. + 2i\left[A_n^{(2)} \frac{\omega\varepsilon_2}{\gamma_n} K_n'(\gamma_n R) + iB_n^{(2)} \frac{n\beta_n a}{(\gamma_n a)^2} K_n(\gamma_n R) \right] J_1 \sin(\Theta) \right\} | F_1(\Theta) \,. \tag{16}$$

$$E_\varphi = \pi \sin\varphi \left\{ A_n^{(2)} K_n(\gamma_n R)\cos\Theta\,(J_0 + J_2) + 2i\left[iA_n^{(2)} \frac{n\beta_n a}{(\gamma_n a)^2} K_n(\gamma_n R) \right.\right.$$
$$\left.\left. - B_n^{(2)} \frac{\omega\mu_2}{\gamma_n} K_n'(\gamma_n R) \right] \sin\Theta\, J_1 + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\, B_n^{(2)} K_n(\gamma_n R)\,(J_0 - J_2) \right\} | F_1(\Theta) \,,$$

где J_0, J_1, J_2 — функции Бесселя первого рода от аргумента $ka \sin\Theta$.

На рис. 2 приведены диаграммы направленности, рассчитанные по формуле

$$F = \frac{E_\Theta^2 + E_\varphi^2}{(E_\Theta^2 + E_\varphi^2)_{\text{макс}}} \,. \tag{17}$$

Для E_Θ^2 $\varphi = 0$, для E_φ^2 $\varphi = \pi/2$. Диаграммы рис. 2, *а*, *б*, *в* соответствуют $n = 0$. В режиме нулевого резонанса антенна направленно не излучает

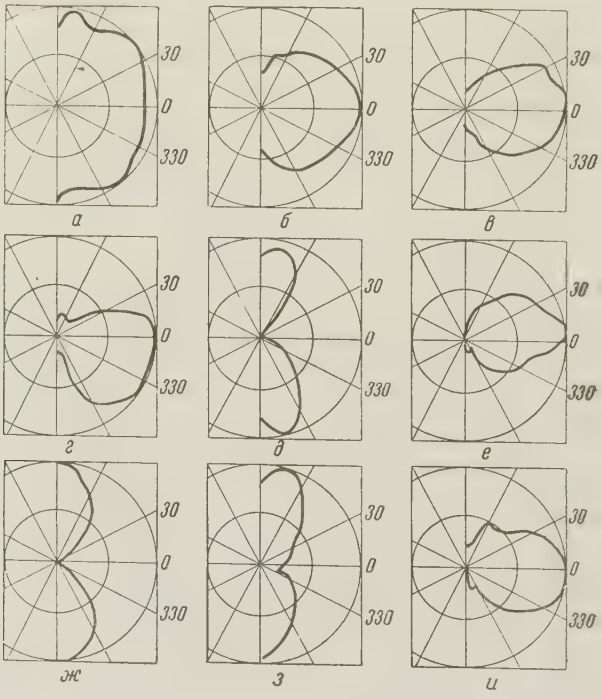


Рис. 2. Диаграммы направленности спирально-диэлектрической антенны, рассчитанные по формулам (16), (17)

(рис. 2, *а*, $ka = 0{,}361$, $\varepsilon = 1$, $ka/\text{ctg}\,\psi = 0{,}07$). Выбранная точка находится на границе области нулевого и первого резонансов, и для систем с большим замедлением диаграмма излучения оказывается направленной (рис. 2, *б*, $ka = 0{,}55$, $\varepsilon = 1$, $ka/\text{ctg}\,\psi = 0{,}065$; рис. 2, *в*, $ka = 0{,}361$, $\varepsilon = 4{,}5$, $ka/\text{ctg}\,\psi = 0{,}07$). Диаграммы направленности симметричны относительно оси антенны.

Кривые рис. 2, *г*, *д*, *е* построены для $n = -1$, $ka = 0{,}742$, $\text{ctg}\,\psi = 5{,}16$. Из рассмотрения дисперсионных кривых рис. 1 видно, что одному значению ka соответствуют три значения $\beta_0 a$ (или $\beta_{-1} a$). Для рис. 2, *г*

$\beta_{-1}a = -1{,}265$, $\varepsilon = 1$, замедление больше единицы. Для рис. 2, *д* $\beta_{-1}a = -0{,}88$, $\varepsilon = 1$, $v_\phi \simeq c$. В первом случае имеем направленное излучение, во втором — ненаправленное. Если выбрать во втором треугольнике точку с тем же $ka = 0{,}742$, $\beta_{-1}a = 0{,}75$, то диаграмма направленности будет зеркальным отображением рис. 2, *д*. Для рис. 2, *е* $\beta_{-1}a = 1{,}55$, $\varepsilon = 4{,}5$, замедление наибольшее. Диаграмма направленности самая узкая из последних трех случаев. Рис. 2, *ж* ($\varepsilon = 1$), рис. 2, *з* ($\varepsilon = 4{,}5$), рис. 2, *и* ($\varepsilon = 20$) ($ka = 0{,}361$, $\operatorname{ctg}\psi = 5{,}16$) подтверждают, что с увеличением замедления диаграмма излучения из ненаправленной превращается в направленную при неизменном $k_0a = 2\pi a/\lambda_0$. При фиксированных размерах антенны увеличение замедления соответствует сдвигу в область низких частот. Для области $n = -1$ оси диаграмм направленности не совпадают с осью системы.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА

Для проверки проведенных расчетов были измерены диаграммы направленности и распределение тока вдоль антенны для спиралей с $\operatorname{ctg}\psi = 4{,}13$; 5,16; 8,42 и различными величинами $\varepsilon = 1$; 4,5; 20; 81. Во всех опытах размеры спиралей оставались постоянными ($l = 14$ *см*, $2a = 4{,}6$ *см*), а длина волны изменялась.

На рис. 3 представлена блок-схема измерительной установки. Высокочастотная энергия подавалась от генератора типа ГС-12 через длинную линию и согласующее устройство к антенне. Приемником служила антенна типа «волновой канал» для волн длиной 10—25 *см* с набором сменных вибраторов и логарифмическая антенна для волн длиной 19—80 *см*. Приемная антенна могла вращаться вокруг горизонтальной оси для снятия поляризационных характеристик. Непосредственно у концов антенны был установлен детектор. Энергия по кабелю длиной 10 *м* подводилась к чувствительному гальванометру постоянного тока. Согласующее и запитывающее устройства представляли собой медную трубу длиной около 50 *см* и диаметром 30 *мм*, которая вместе с проводом спирали составляла коаксиальную линию (150 *ом*). Центральный проводник крепился на двух шайбах из органического стекла. В линию был введен кабель РК-50 (150 *ом*), который соединялся с отрезком кабеля РК-2 (100 *ом*) длиной ~ 7 *см*, а затем со стандартным кабелем (75 *ом*). Для снятия картины поля применялся подвижный зонд индукционного типа.

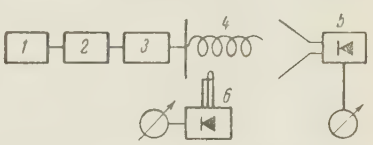


Рис. 3. Блок-схема измерительной установки:

1 — генератор колебаний высокой частоты; *2* — длинная линия; *3* — согласующее устройство; *4* — антенна; *5* — приемная антенна; *6* — подвижный зонд

На рис. 4 представлены результаты измерений спиральной антенны с $\varepsilon = 1$ и $\operatorname{ctg}\psi = 5{,}16$. Эти измерения хорошо согласуются с измерениями работы [5]. В области второго резонанса (рис. 4, *а*) коэффициенты отражения отличны от нуля. Рис. 4, *б*, *в* соответствуют первому резонансу. Вдоль антенны установилась бегущая волна. В областях, близких к нулевому резонансу, по всей длине антенны наблюдаются стоячие волны. На рис. 4 пунктиром нанесены теоретические диаграммы направленности. Наблюдается хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых. Здесь, как и в дальнейшем, одна из причин некоторого несовпадения теоретических и экспериментальных кривых (рис. 4, *в*, *г*) заключается в том, что при вычислении диаграмм направленности методом интеграла Кирхгофа не был учтен металлический отражатель, применявшийся в опыте.

На рис. 5 и 6 приведены кривые диаграмм направленности спирально-диэлектрических антенн для различных диэлектриков. Из графиков видно, что в режиме направленного излучения вдоль антенны имеются бегущие и стоячие волны. При неизменных размерах антенны диапазон направленного излучения смещается в сторону низких частот тем больше, чем больше ε. С внесением диэлектрика наблюдается сужение диапазона направленного излучения. Диаграммы направленности совпадают по форме с рас-

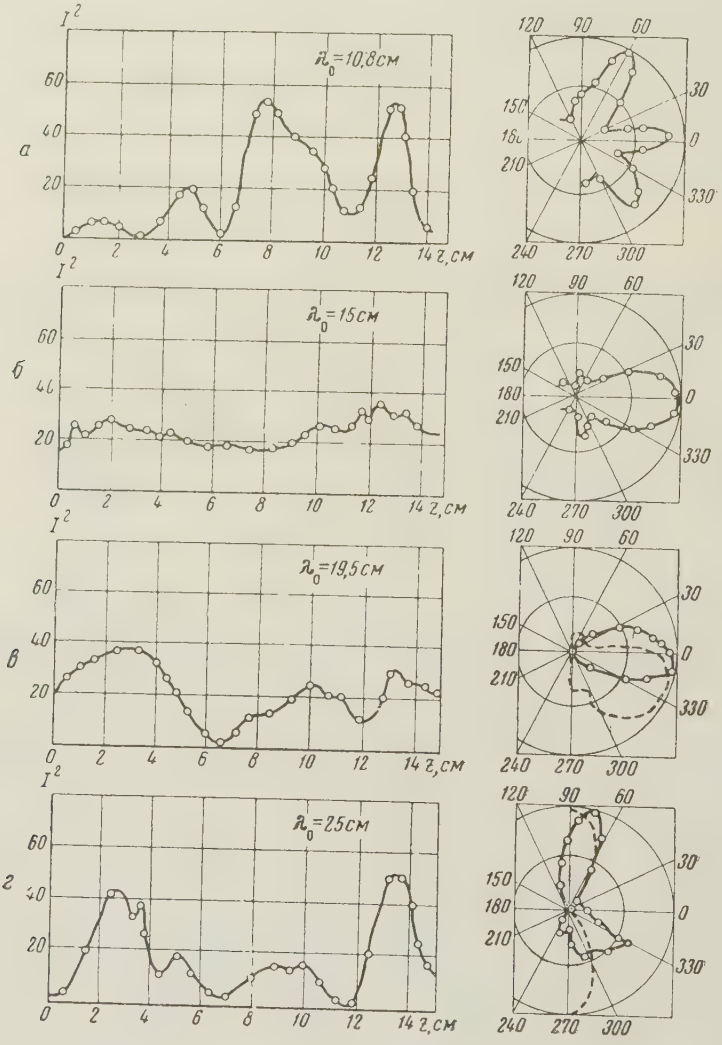


Рис. 4. Экспериментальные диаграммы направленности и распределение тока вдоль спиральной антенны (ε = 1 ctg ψ = 5,16). Пунктиром нанесены теоретические диаграммы направленности

четными; расхождение в основном наблюдается в углах отклонения оси диаграммы направленности от оси антенны.

На рис. 7 представлены результаты измерений спирально-диэлектрической антенны, внутренняя область которой заполнена водой. В коротковолновом участке наблюдается сильное затухание. Рис. 7, *а*, *б* соответствуют областям третьего и второго резонансов. Внесение диэлектрика позволяет получить в этих областях направленную диаграмму излучения.

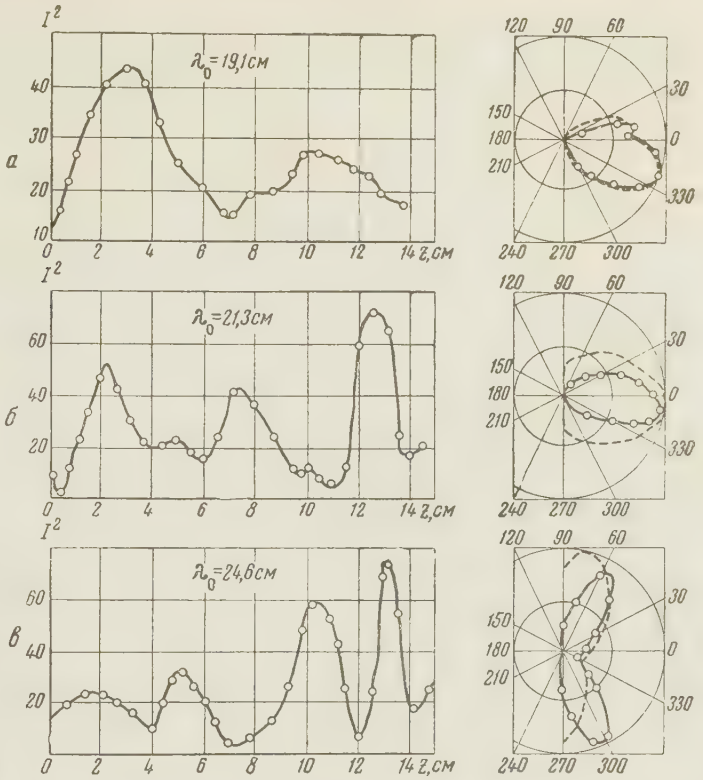


Рис. 5. Экспериментальные диаграммы направленности и распределение тока вдоль спирально-диэлектрической антенны ($\varepsilon = 4{,}5$, $\operatorname{ctg}\psi = 5{,}16$):

а, *б* — область первого резонанса; *в* — область нулевого резонанса. Пунктиром нанесены теоретические диаграммы направленности

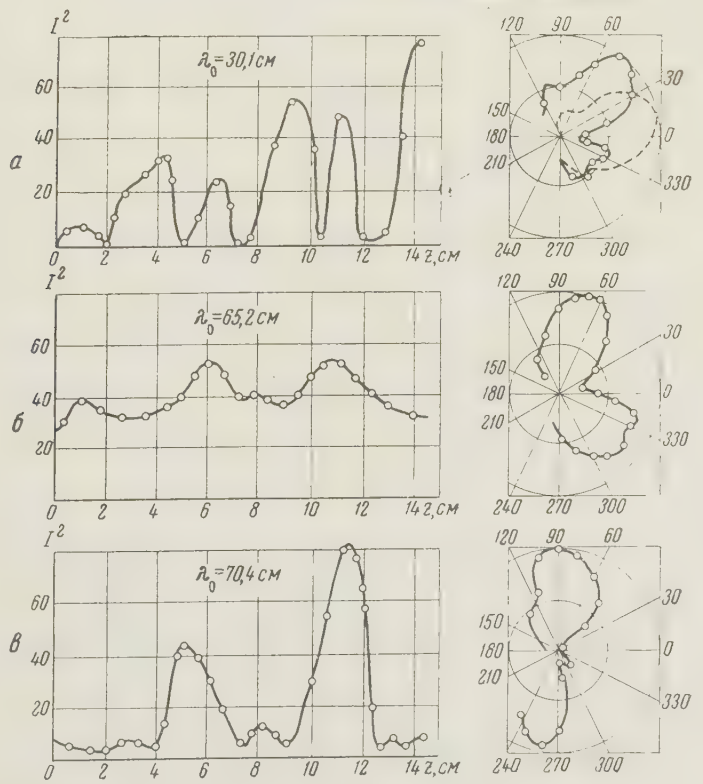


Рис. 6. Экспериментальные диаграммы направленности и распределение тока вдоль спирально-диэлектрической антенны ($\varepsilon = 20$, $\operatorname{ctg}\psi = 8{,}4$):

а — область первого резонанса; *б*, *в* — область нулевого резонанса. Пунктиром нанесена теоретическая диаграмма направленности

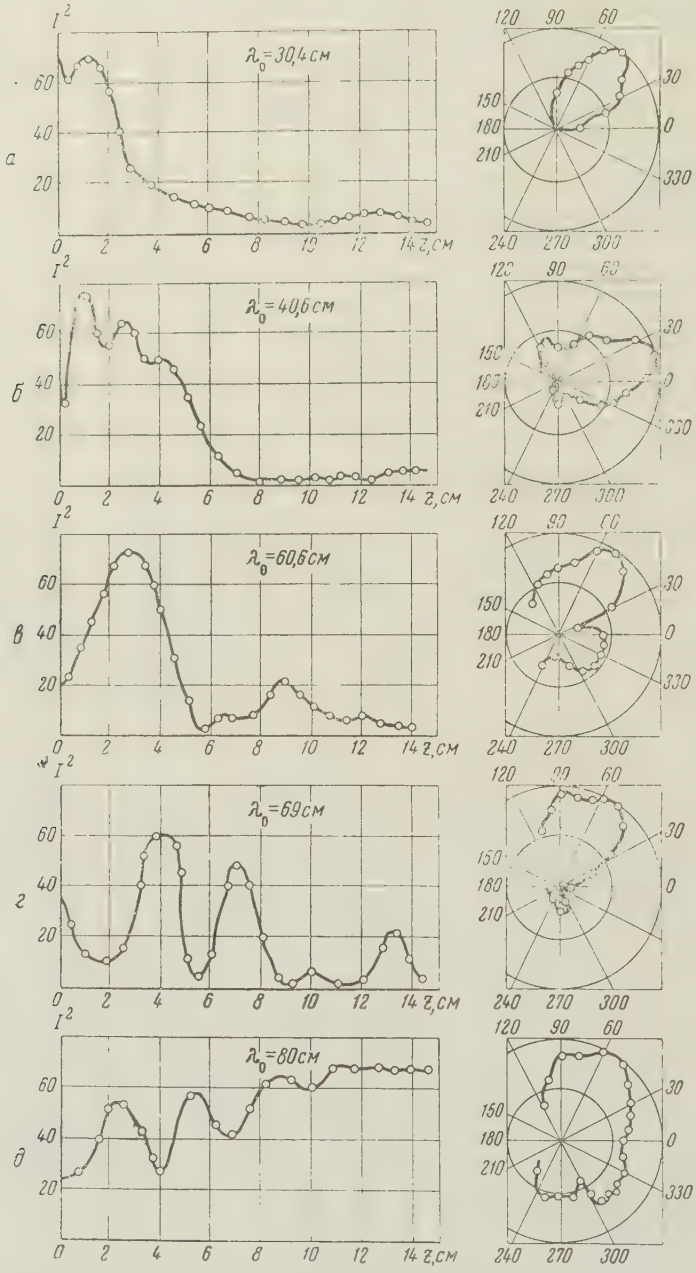


Рис. 7. Экспериментальные диаграммы направленности и распределение тока вдоль спирально-диэлектрической антенны ($\varepsilon = 81$, $\operatorname{ctg}\psi = 5{,}16$):

а, *б* — область третьего и второго резонансов; *в*, *г* — область первого резонанса; *д* — область нулевого резонанса

В области первого резонанса (рис. 7, *в*, *г*) наблюдается смещение главного максимума диаграммы направленности от оси антенны. Диапазон направленного излучения сильно сужается. Рис. 7, *д* соответствует области нулевого резонанса.

ВЫВОДЫ

Теоретическое и экспериментальное исследования спирально-диэлектрической антенны показали следующее.

1. Внесение диэлектрика в спиральный волновод значительно уменьшает фазовую скорость электромагнитных волн и увеличивает замедление.

2. Увеличение замедления волн в спирально-диэлектрическом волноводе приводит к более направленному излучению энергии в пространство.

3. Внесение диэлектрика смещает ось диаграммы направленности от оси антенны. Это обстоятельство подтверждено на опыте, хотя количественного совпадения теории с экспериментом нет. Физически это явление, по-видимому, можно объяснить тем, что излучаемые электромагнитные волны несимметричны по азимуту спирали.

4. Внесение диэлектрика в спиральную антенну позволяет уменьшить размеры антенны почти в $\sqrt{\varepsilon}$ раз, но при этом уменьшается ширина полосы частот, пропускаемых системой.

5. Для увеличения ширины полосы частот у исследуемой антенны вместо сплошного диэлектрического стержня внутри спирали можно использовать слоистый диэлектрик или магнитодиэлектрическую среду

ЛИТЕРАТУРА

. M. Chodorow, E. L. Chu, J. Appl. Phys., 1956, **26**, 1, 732.
. В. П. Шестопалов, Л. И. Спольник, ЖТФ, 1960, **30**, 1, 3.
. В. П. Шестопалов, А. А. Булгаков, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 1, 92.
. В. П. Шестопалов, С. С. Калмыкова, ЖТФ, 1961, **31**, 3, 285.
. M. Bouix, Ann.télécommuns, 1952, **7**, 7—8, 112.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
9 VII 1960

1961 № 7

СФЕРИЧЕСКИЕ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

Л. Д. Бахрах, И. В. Вавилова

Рассмотрены двухзеркальные сферические антенны, позволяющие обеспечить неискаженное качание диаграммы направленности в широком секторе. Системы такого типа перспективны при создании больших антенн, например радиотелескопов.

Приведены два способа расчета профиля малого зеркала: 1) при помощи фокальных кривых, 2) при помощи метода волновых фронтов. Применительно к расчету двухзеркальных антенн метод волновых фронтов преобразован таким образом, чтобы избежать решения дополнительных дифференциальных уравнений. Рассмотрены оптимальные соотношения между коэффициентом использования всего раскрыва сферического зеркала и размерами малого зеркала. Проанализирован вопрос о влиянии точности установки элементов системы — облучателя и малого зеркала — на характеристики антенны.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время весьма актуальны вопросы создания больших зеркальных антенн, у которых качание луча осуществляется перемещением сравнительно небольших масс.

В связи с этим привлекают внимание сферические зеркальные антенны, качание диаграммы направленности которых производится путем перемещения излучателя относительно центра сферической поверхности. При этом в силу симметрии коэффициент использования поверхности зеркала не изменяется (рис. 1). Однако величина коэффициента использования поверхности зеркала однозеркальной сферической антенны существенно зависит от ширины диаграммы направленности и угла качания. Это и понятно, поскольку должна использоваться только часть сферического зеркала, при отражении от которой фазовые ошибки на краях не превышают допустимых значений. Расчеты, проведенные для сферического зеркала с излучателем, оптимальное положение которого подбиралось для данной ширины диаграммы, показали, что при узких диаграммах коэффициент использования зеркала весьма низок и несколько возрастает при более широких диаграммах.

На рис. 2 представлена кривая зависимости отношения допустимого размера действующего раскрыва к диаметру сферы $D_д/D$ от ширины диаграммы ψ. Кривая получена из условия, что фазовая ошибка в пределах действующего раскрыва не превышает $\lambda/8$.

На рис. 3 представлены кривые зависимости коэффициента использования раскрыва $K = D_д/AB$ от полного угла качания (обозначения ясны из рис. 1) для различной ширины диаграммы направленности. Отметим, что величина коэффициента использования раскрыва, приведенная на графике, не учитывает характера распределения амплитуд в раскрыве. Недостатки однозеркальной сферической системы, связанные с плохим использованием зеркала при качании узких диаграмм, можно радикально устранить, применив предложенную нами в 1951 г. и описанную в 1954 г. [1] двухзеркальную сферическую антенну.

В последнее время появилось сообщение о разработке проекта радиотелескопа, работающего по аналогичному принципу [2], и о варианте цилиндрической каналовой системы [3].

Настоящая статья посвящена основным вопросам расчета и проекти-вания двухзеркальной сферической системы. В ней специально рас-смотрены вопросы, связанные с уменьшением размеров малого зеркала, также вопросы влияния точности установ-ки отдельных элементов системы на ее направ-ленные свойства. Эти вопросы могут оказать-ся весьма существенными при проектирова-нии больших антенн, в частности антенн для радиотелескопов с высокой разрешающей спо-собностью.

В общем случае для качания диаграммы направленности специальной формы можно в качестве большого зеркала использовать часть тороидальной поверхности с определен-ным профилем образующей и соответственно

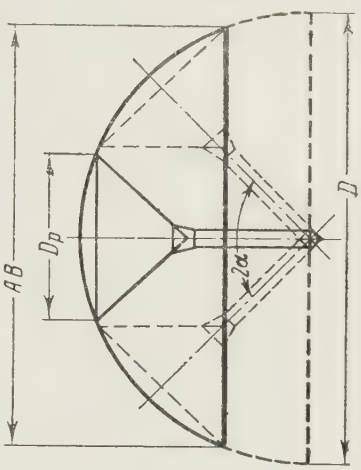


Рис. 1. К определению коэффициента использования поверхности зеркала

рассчитать малое зеркало [4]. Однако в настоящей статье мы ограничимся рассмотрением только сферических двухзеркальных систем, предназначен-ных для формирования и управления игольчатым лучом.

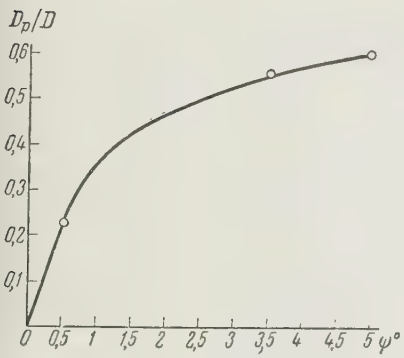


Рис. 2

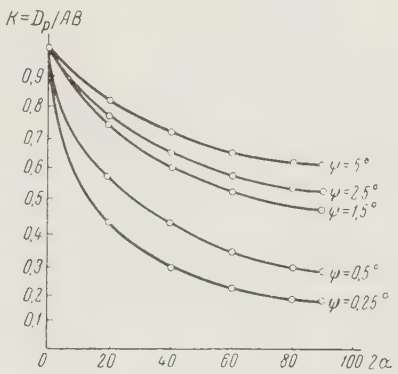


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость между допустимым раскрывом и диаметром сферы от ширины диаграммы направленности

Рис. 3. Зависимость коэффициента использования раскрыва от полного угла качания при различной ширине диаграммы направленности

1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Двухзеркальная сферическая система состоит из двух зеркал: боль-шого сферического, концентрирующего энергию в главном направлении, малого, которое рассеивает в направлении большого зеркала энергию, падающую от облучателя. Малое зеркало рассчитывается таким образом, чтобы в раскрыве сферического зеркала формировался плоский фронт

волны. Фазовые ошибки в системе отсутствуют. Поэтому коэффициент использования раскрыва и сектор качания не зависят от ширины диаграммы. Это весьма важное положительное свойство, выгодно отличающее двухзеркальную сферическую систему от однозеркальной сферической.

Качание диаграммы направленности в двухзеркальной сферической системе осуществляется поворотом малого зеркала совместно с излучателем относительно центра сферического зеркала. Очевидно, что в силу симметрии диаграмма искажаться не будет, а максимум ее будет отклоняться на угол поворота малого зеркала с облучателем (рис. 4).

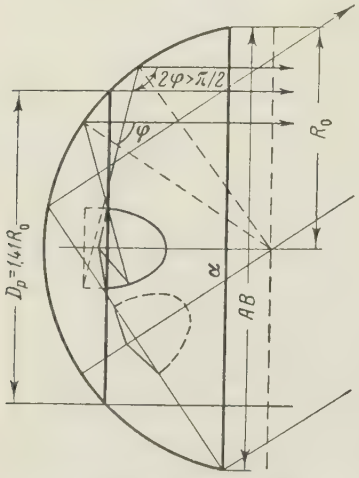


Рис. 4. Сферическая двухзеркальная антенна

Для двухзеркальной сферической системы существенно установить, насколько полно может перехватываться малым зеркалом и облучателем пучок лучей, отраженных от большого зеркала, какое при этом получается использование большого зеркала и какова степень экранировки малым зеркалом лучей, отраженных от большого зеркала. Принципиально можно выбрать большое зеркало в виде полусферы, но все зеркало использовать не удается. В самом деле, параллельные лучи, падающие на сферическое зеркало, отражаются от последнего под различными углами φ. В том случае, когда $2\varphi \leqslant \pi/2$ (угол между падающим и отраженным от сферического зеркала лучом), малое зеркало может отражать лучи, но когда $2\varphi > \pi/2$, одна часть малого зеркала будет экранировать другую (рис. 4).

Таким образом, максимально возможный действующий раскрыв D_p в двухзеркальной сферической системе ограничен стороной вписанного квадрата и равен $1{,}41\ R_0$. Очевидно, что при качании диаграммы направленности весь раскрыв зеркала AB должен быть больше $1{,}41\ R_0$.

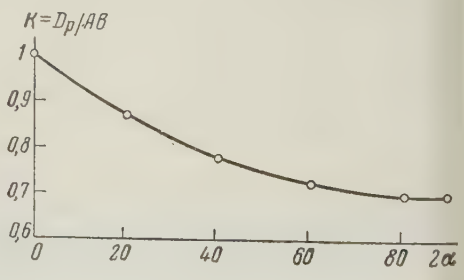


Рис. 5. Зависимость коэффициента использования раскрыва от угла качания диаграммы для $D_p = 1{,}41\ R_0$

Раскрыв сферического зеркала AB зависит от угла качания диаграммы 2α (рис. 4).

Из геометрических соображений следует, что если действующий раскрыв $D_p = 1{,}41\ R_0$, то

$$AB = \frac{2R_0}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha) \qquad (1)$$

и, следовательно, коэффициент использования раскрыва $K = D_p/AB$ может быть определен из

$$K = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}. \qquad (2)$$

На рис. 5 построена зависимость $K = f(2\alpha)$.

Легко заметить, что коэффициент использования раскрыва при увеличении сектора качания падает вначале довольно резко (примерно до $\pm 20°$), после чего дальнейшее уменьшение коэффициента использования раскрыва идет весьма медленно.

Очевидно, что такая система в принципе может обеспечить управление лучом не только в одной плоскости, но и в телесном угле, причем максимально возможная величина телесного угла составляет 90° при коэффициенте использования раскрыва, равном 0,7. Большое зеркало должно представлять собой при этом полусферу.

Если большое сферическое зеркало выполнить из поляризационной решетки, провода которой ориентированы под углом 45°, аналогично тому, как это делается в тороидальных однозеркальных антеннах [5, 6], то на базе двухзеркальной сферической антенны можно построить систему, обеспечивающую управление лучом в полном телесном угле. Расчеты показали, что в такой системе также может быть обеспечен действующий раскрыв, равный 0,7 D.

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СФЕРИЧЕСКОЙ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Расчет сферической двухзеркальной системы, предназначенной для формирования игольчатой диаграммы направленности, сводится к расчету профиля малого зеркала, поскольку последнее в этом случае представляет собой поверхность вращения. Для решения задачи необходимо задать положение облучателя и одной из точек профиля малого зеркала. Профиль большого зеркала — окружность — известен, а фронт волны, падающей на большое зеркало, предполагается плоским.

Расчет профиля малого зеркала наиболее удобно производить следующими двумя методами: методом фокальной кривой и методом волновых фронтов.

Первый метод представляет собой дальнейшее развитие метода частных фокусов [7]. Частный фокус — условное название точки схождения лучей, отраженных от участка большого зеркала. Фокальная поверхность в трехмерном случае, а в двумерном случае — фокальная кривая являются геометрическим местом частных фокусов. Заметим, что в случае расчета двухзеркальных систем знание фокальной поверхности позволяет правильно выбрать исходные данные для расчета малого зеркала, чтобы размеры его были близки к оптимальным. В двумерном случае фокальные кривые или каустики представляют собой эволюты — геометрическое место центров кривизны волнового фронта. Уравнение фокальной кривой в векторном виде:

$$\vec{F} = \vec{R} + M\vec{a_k}, \tag{3}$$

где

$$M = \frac{\cos\varphi}{2k_1 - k_2\cos\varphi};$$

k_1 и k_2 — соответственно кривизны отражателя и падающего волнового фронта; φ — угол падения волны; $\vec{a_k}$ — направление отраженного луча.

Иногда удобно определять фокальную кривую в параметрическом виде. В частности, это нетрудно сделать для рассматриваемой задачи.

Пусть на большое зеркало падают параллельные лучи. Тогда из рис. 6 следуют соотношения

$$\left.\begin{aligned}\frac{Y - Y_1}{X - X_1} &= \operatorname{tg}\gamma,\\ \frac{Y - Y_2}{X - X_2} &= \operatorname{tg}\gamma_1,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= R_0 \sin\varphi, \\ X_1 &= R_0 \cos\varphi, \\ Y_2 &= R_0 \sin\varphi + R_0 \cos\varphi\, d\varphi, \\ X_2 &= R_0 \cos\varphi - R_0 \sin\varphi\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma + \frac{2}{\cos^2 2\varphi}. \quad (6)$$

Подставив выражения (5) и (6) в систему уравнений (4) и решая их совместно, получим уравнения фокальной кривой

$$X = \cos\varphi\left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right),$$
$$Y = \sin^3\varphi R_0. \quad (7)$$

После того как найдена фокальная кривая, нетрудно построить профиль малого зеркала, задавшись точкой на малом зеркале и положением облучателя.

Искомый профиль малого зеркала есть не что иное, как огибающая эллипсов или гипербол, один из фокусов которых совпадает с положением облучателя, а второй находится на фокальной кривой в точке касания отраженного от большого зеркала луча.

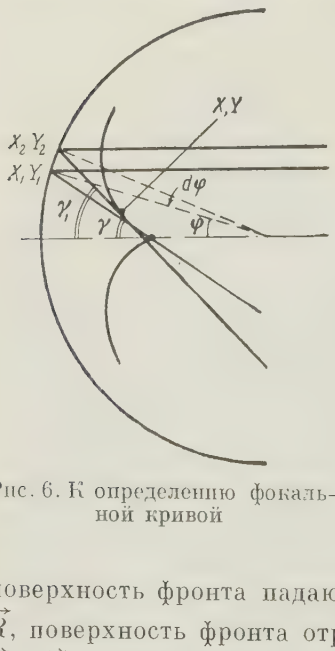


Рис. 6. К определению фокальной кривой

Если малое зеркало находится перед фокальной кривой (предфокальная область), то профиль его описывается огибающей гипербол, а в зафокальной области — огибающей эллипсов.

Метод фокальной кривой оказывается весьма удобным при графическом построении профиля малого зеркала.

Второй способ расчета малого зеркала основан на методе волновых фронтов [8], который базируется на известных работах Гамильтона. Суть этого метода заключается в следующем: если известны любые две из трех поверхностей (фронта падающей волны, отражателя и фронта отраженной волны), то можно определить третью поверхность. Метод волновых фронтов оперирует с векторным изображением поверхностей. Обозначим поверхность фронта падающей волны через $\vec{X}$, поверхность отражателя $\vec{R}$, поверхность фронта отраженной волны $\vec{Y}$. Если известны, например, $\vec{X}$ и $\vec{R}$, то уравнение третьей поверхности $\vec{Y}$ находится из

$$\vec{Y} = \vec{X} - 2\vec{\eta}\,[\vec{\eta}\,(\vec{R} - \vec{X})], \quad (8)$$

где $\vec{\eta}$ — единичная нормаль к поверхности отражателя.

Если же известны $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, то можно получить выражение для определения $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{Y} + \vec{\xi}\,\frac{[C^2 - (\vec{Y} - \vec{X})^2]}{2\,[C + (\vec{Y} - \vec{X})\,\vec{\xi}]}, \quad (9)$$

где C — полный путь луча от фронта падающей волны до фронта отраженной волны.

Заметим, что искомые поверхности $\vec{Y}$ или $\vec{R}$ в общем случае оказываются функцией четырех независимых параметров. Так, например, $\vec{Y}$ =

$\vec{Y}(u, v, s, t)$, так как $\vec{X} = \vec{X}(u, v,)$ и $\vec{R} = \vec{R}(s, t)$. Поэтому необходимо установить дополнительную зависимость между параметрами u, v и s, t. Она устанавливается из условия перпендикулярности лучей и волновых фронтов путем решения уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\vec{R} - \vec{X})\,\vec{X}_u = 0,\\ (\vec{R} - \vec{X})\,\vec{X}_v = 0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $\vec{X}_u$ и $\vec{X}_v$ — частные производные по соответствующему параметру. При решении задач методом волновых фронтов желательно так выбирать волновые фронты и отражающие поверхности, чтобы по возможности избежать решения уравнений (10). Применительно к расчету двухзеркальных систем, в частности для расчета малого зеркала, метод волновых фронтов разработан нами таким образом, чтобы каждую точку искомой поверхности можно было рассчитывать независимо. Особенно удобен метод волновых фронтов в тех случаях, когда поверхность большого зеркала и падающий на большое зеркало волновой фронт можно легко выразить аналитически.

При расчете двухзеркальных антенн рассматриваются две отражающие поверхности и три волновых фронта, один из которых промежуточный. Идея применения метода волновых фронтов к расчету двухзеркальных систем состоит в том, чтобы разумно комбинировать методику расчета, рассматривая вначале систему, работающую на прием, и на заключительном этапе — на передачу. При этом можно рассчитать малое зеркало, пользуясь недифференциальными векторными уравнениями.

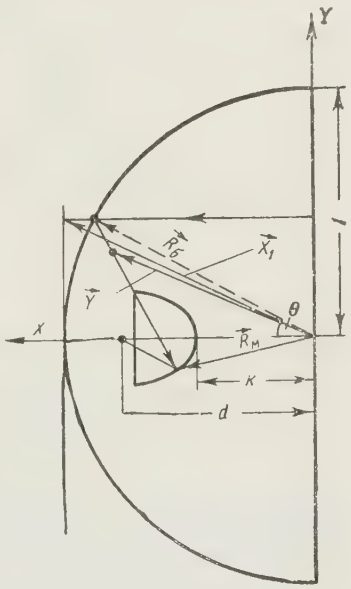


Рис. 7. К определению поверхности малого зеркала

При расчете малого зеркала в сферической двухзеркальной системе методом волновых фронтов необходимо выделить два этапа: 1) рассматривая работу системы на прием, по заданному плоскому фронту волны $\vec{X}_1$, падающему на большое сферическое зеркало $\vec{R}_б$, определяют отраженный волновой фронт $\vec{Y}$; 2) рассматривая работу системы на передачу, по заданному сферическому фронту волны $\vec{X}_2$, падающему на малое зеркало от облучателя, и по отраженному фронту $\vec{Y}$, определенному из первого этапа, находят поверхность малого зеркала $\vec{R}_м$.

Как уже отмечалось выше, малое зеркало в рассматриваемом случае представляет собой поверхность вращения, и задача сводится к определению профиля на плоскости. Наиболее рационально решать задачу, пользуясь полярной системой координат. Радиус большого зеркала примем равным единице.

Тогда, согласно рис. 7,

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_б &= \cos\Theta\,\vec{i} + \sin\Theta\,\vec{j},\\ \vec{X}_1 &= \vec{i} + \sin\Theta\,\vec{j},\\ \vec{\eta} &= \cos\Theta\,\vec{i} + \sin\Theta\,\vec{j}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставив (11) в (8), получим уравнение отраженного волнового фронта $\vec{Y}$:

$$\vec{Y} = Y_x\vec{i} + Y_y\vec{j},$$
$$Y_x = [1 - 2\cos^2\Theta(1 - \cos\Theta)], \quad (12)$$
$$Y_y = [\sin\Theta - \sin 2\Theta(1 - \cos\Theta)].$$

Сферический волновой фронт $\vec{X}_2$ удобно рассмотреть непосредственно в точке, где расположен облучатель, т. е.

$$\vec{X}_2 = \vec{id}. \quad (13)$$

При таком рассмотрении условие (10) выполняется автоматически. Единичная нормаль к отраженному фронту, направленная по отраженному лучу, определяется как

$$\vec{\xi} = -\cos 2\Theta\,\vec{i} - \sin 2\Theta\vec{j}. \quad (14)$$

Подставив (12), (13) и (14) в выражение (9), получим уравнения для определения координат профиля малого зеркала:

$$R_{x\,м} = Y_x - \cos 2\Theta P,$$
$$R_{y\,м} = Y_y - \sin 2\Theta P, \quad (15)$$

где

$$P = \frac{C^2 - [(Y_x - d)^2 + Y_y^2]}{2[C - \cos 2\Theta(Y_x - d) - \sin 2\Theta Y_y]}; \quad (16)$$

C — длина пути от фронта $\overline{Y}_1$ до фронта $\overline{X}_2$. Как видно из рис. 7,

$$C = 1 - 2k + d, \quad (17)$$

где k — расстояние от центра сферического зеркала до фазового центра облучателя.

Уравнения, полученные методом волновых фронтов, позволяют не только сравнительно просто рассчитать малое зеркало, но и определять наиболее рациональное расположение элементов системы, а также влияние точности установки элементов системы на ее направленные свойства.

3. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

При проектировании сферической двухзеркальной системы необходимо учитывать, что для получения неискаженной диаграммы весьма существенна величина экранировки пучка лучей, отраженных большим зеркалом, обусловленная малым зеркалом. Расчеты показывают, что отношение раскрыва малого зеркала к величине действующего раскрыва большого зеркала не должно превышать 0,25. Следует учитывать также, что раскрыв малого зеркала не должен быть меньше 4—5 λ, так как в противном случае расчеты методом геометрической оптики становятся некорректными.

Кроме того, существенно, чтобы лучи, отраженные малым зеркалом, не претерпевали отражения от его противоположного края. Это условие всегда соблюдается, если профиль малого зеркала не пересекает фокальной кривой.

Величина действующего раскрыва $D_р$ в сферической двухзеркальной системе жестко связана с ее геометрическими размерами — положением раскрыва малого зеркала $R_{xр}$, величиной его раскрыва $2R_{yр}$, положением облучателя. Формулы (15) для расчета профиля малого зеркала, полученные методом волновых фронтов, позволяют установить зависимость между углом Θ, синус которого определяет отношение действующего раскрыва к диаметру большого зеркала $D_р/D$, и величинами $R_{xр}$ и $R_{yр}$.

Действительно, для каждого фиксированного значения $R_{ур}$ по формулам (15) можно рассчитать зависимость

$$\Theta = f(R_{хр}).$$

При расчете следует учитывать, что профиль малого зеркала не должен пересекать фокальной кривой, определяемой уравнением (7). Поэтому для каждого значения $R_{ур}$ найдутся такие крайние значения $R_{хр}$, для

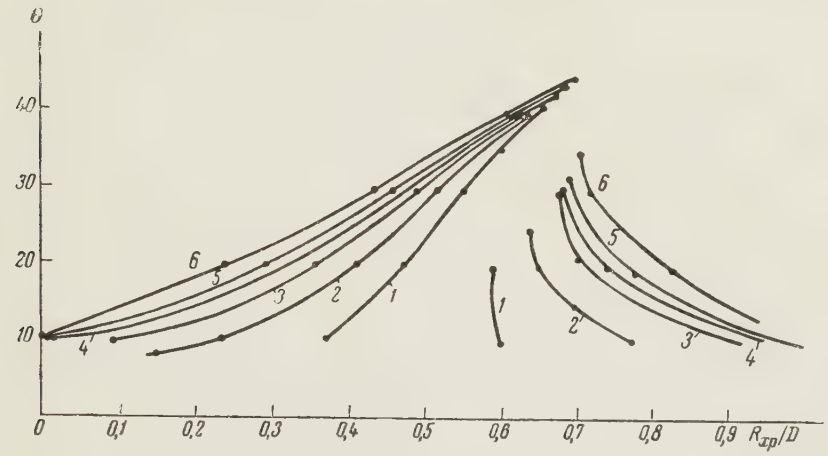


Рис. 8. Кривые зависимости угла θ от положения $R_{хр}$ раскрыва малого зеркала для различных величин раскрывов:

1 — $2R_{ур} = 0{,}05\ D$; *2* — $2R_{ур} = 0{,}1\ D$; *3* — $2R_{ур} = 0{,}15\ D$; *4* — $2R_{ур} = 0{,}18\ D$; *5* — $2R_{ур} = 0{,}2\ D$; *6* — $2R_{ур} = 0{,}25\ D$

которых $R_{ур} = y$, где y — ордината соответствующей точки на фокальной кривой. При этих положениях раскрыва малого зеркала получается максимальная для данного раскрыва малого зеркала $2R_{ур}$ величина действующего раскрыва $D_р$ большого зеркала.

На рис. 8 представлены кривые $\Theta = f(R_{хр})$, рассчитанные с учетом указанного обстоятельства. Кривые в правой части графика относятся к малым зеркалам, расположенным в предфокальной области, кривые в левой части графика относятся к малым зеркалам, расположенным в зафокальной области. Графики позволяют сделать вывод, что при одних и тех же размерах малых зеркал большее отношение $D_р/D$ получается в тех случаях, когда малые зеркала расположены в зафокальной области.

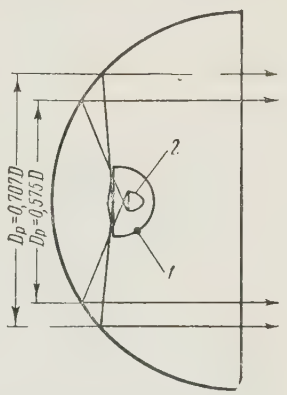


Рис. 9. Сферическая двухзеркальная система с малыми зеркалами:

1 — зеркало № 1; *2* — зеркало № 2

Строго говоря, максимально возможный действующий раскрыв $D_р$, равный $0{,}707D$ ($\Theta = 45°$), достигается при $R_{хр} = 0{,}707\,R_0$ и $2R_{ур} = 0{,}43D$. Однако при уменьшении $2R_{ур}$ до $0{,}18\,D$ действующий раскрыв большого зеркала составит $0{,}7\ D$, т. е. практически не изменится.

При уменьшении размеров малого зеркала до $2R_{ур} = 0{,}05\ D$ действующий раскрыв большого зеркала падает до $0{,}575\ D$, т. е. на 18%. Сказанное выше относится к зеркалам, расположенным в зафокальной области.

На рис. 9 показана сферическая двухзеркальная система с малыми зеркалами, рассчитанными соответственно на обеспечение действующего раскрыва, равного 0,7 D (зеркало № 1) и 0,575 D (зеркало № 2).

Одновременно при уменьшении размеров малого зеркала оптимальное значение R_{xp} также снижается. Это обстоятельство особенно важно иметь в виду при проектировании больших антенн, так как уменьшение габаритов подвижной части может значительно облегчить и удешевить конструкцию, а уменьшение коэффициента использования раскрыва K при этом несущественно. На рис. 10 показана зависимость падения коэффициента использования раскрыва ΔK от сектора качания 2α, которая определяется изменением размеров раскрыва малого зеркала с 0,18 D до 0,05 D. Из графика видно, что при секторе качания 90° коэффициент использования раскрыва падает всего на 16%.

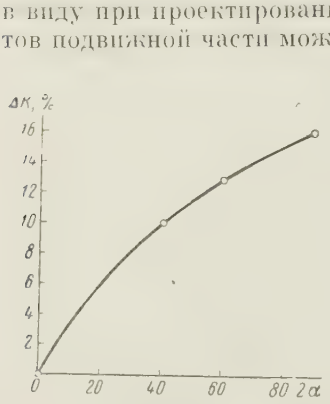


Рис. 10. Зависимость падения коэффициента использования раскрыва от сектора качания диаграммы направленности

При выборе положения излучателя в сферической двухзеркальной системе необходимо руководствоваться следующим.

Из физических соображений следует, что в выражении (17) $C > 0$. Для малых зеркал, расположенных в зафокальной области, $k \leqslant 0{,}5$. Следовательно, в этом случае $d \leqslant C$. Для зеркал, расположенных в предфокальной области, $k > 0{,}5$ и $d > C$. Наиболее целесообразно располагать излучатель вблизи раскрыва малого зеркала.

Подводя итоги сказанному, можно рекомендовать такой порядок проектирования и расчета сферической двухзеркальной системы.

1. По кривым рис. 8 выбирают величину малого зеркала, т. е. 2 R_{yp}, его положение R_{xp} и определяют соответствующий угол Θ, синус которого характеризует отношение действующего раскрыва к диаметру сферы, т. е.

$$\sin\theta = \frac{D_p}{D}.$$

2. Задаются положением излучателя d вблизи раскрыва малого зеркала.
3. Определяют величину C:

$$C = \sqrt{(Y_y - R_{yp})^2 + (Y_x - R_{xp})^2} + \sqrt{R_{yp}^2 + (R_{xp} - d)^2}, \qquad (18)$$

где Y_y и Y_x — соответствующие точки на отраженном волновом фронте, рассчитываемые по формулам (12). Для зафокальной системы должно выполняться условие $C > d$, для предфокальной — условие $C < d$.

4. По формулам (15) рассчитывают профиль малого зеркала.

4. ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ УСТАНОВКИ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ НА ЕЕ НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА

При проектировании сферических двухзеркальных антенн больших размеров необходимо знать, с какой допустимой точностью должны быть установлены элементы системы, так как регулировка взаимного расположения элементов в готовой конструкции антенны в ряде случаев может оказаться невозможной или крайне сложной. Установление же слишком жестких допусков на взаимное расположение элементов системы также может неоправданно усложнить конструкцию антенны. Поэтому крайне важно оценить степень влияния точности установки отдельных элементов системы на ее направленные свойства. Эту задачу можно решить при помощи метода волновых фронтов. Действительно, этот метод позволяет

определить форму волнового фронта на выходе антенны при смещении излучателя и малого зеркала относительно расчетных положений.

Расчет волнового фронта ведется так, чтобы установить соответствие между точками раскрыва большого зеркала и точками волнового фронта. Поэтому не составляет труда вычислить кривую распределения фазовой ошибки по раскрыву антенны, по которой затем можно непосредственно судить об изменении направленных свойств системы.

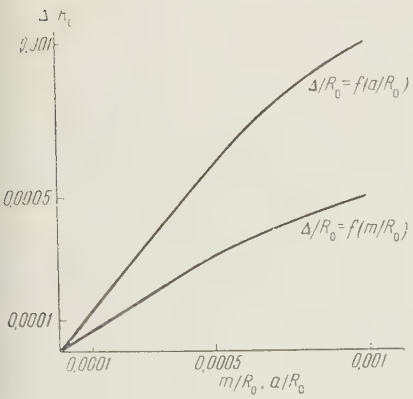


Рис. 11

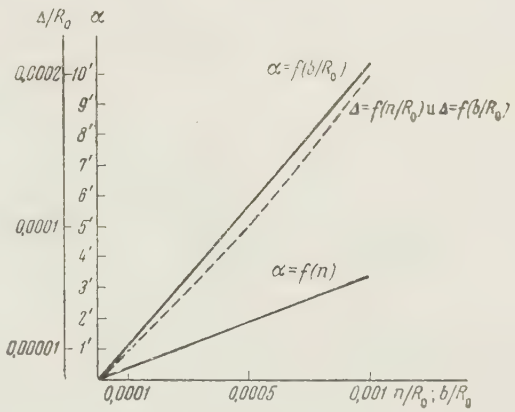


Рис. 12

Рис. 11. Зависимость Δ/R_0 от смещений зеркала и излучателя

Рис. 12. Зависимость угла отклонения луча α и фазовой ошибки Δ/R_0 от смещений зеркала и излучателя

Рис. 13. Зависимость α и Δ/R_0 от изменений угла наклона зеркала

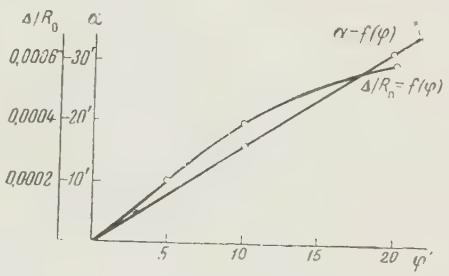


Рис. 13

Пусть излучатель и малое зеркало сместились относительно расчетных положений *. Тогда уравнение фронта волны, падающей из излучателя, согласно (13), будет иметь вид

$$\vec{X}_2' = \vec{i}(d + m) + \vec{j}n, \tag{19}$$

где m и n — смещение излучателя по осям x и y соответственно.

Координаты малого зеркала при произвольном смещении определяются выражениями

$$R'_{xм} = (R_{xм} - a)\cos\varphi + (R_{yм} - b)\sin\varphi,$$

$$R'_{yм} = (a - R_{xм})\sin\varphi + (R_{yм} - b)\cos\varphi, \tag{20}$$

где $R_{xм}$ и $R_{yм}$ — координаты малого зеркала, рассчитанные по формулам (15); a и b — смещение зеркала соответственно вдоль осей x и y; φ — угол поворота зеркала вокруг оси x.

* Поскольку нас интересуют относительно небольшие смещения, мы продолжаем рассматривать задачу как плоскую.

Для определения волнового фронта на выходе антенны удобно рассматривать работу системы на передачу. Сначала необходимо определить, пользуясь выражением (8), промежуточный волновой фронт $\vec{Y}_1$, отраженный от смещенного малого зеркала, по падающему фронту $\vec{X}'_2$. Затем, принимая отраженный волновой фронт $\vec{Y}_1$ за падающий на большое зеркало, по тому же выражению (8) необходимо определить отраженный волновой фронт $\vec{Y}_2$. Мы не приводим вывод расчетных соотношений, так как он довольно громоздок.

Искажения волнового фронта $\vec{Y}_2$ в общем случае зависят от нескольких параметров: m, n, a, b, φ. Для практики интересно оценить влияние каждого из этих параметров отдельно. На электронной вычислительной машине были рассчитаны волновые фронты в зависимости от изменения каждого из параметров. На основе этих расчетов построены приведенные на рис. 11, 12, 13 кривые зависимости фазовой ошибки Δ/R_0 от изменения того или иного параметра.

На рис. 11 показаны зависимости $\Delta/R_0 = f(a/R_0)$ и $\Delta/R_0 = (f\, m/R_0)$, откуда видно, что допуск на точность установки зеркала по оси x должен быть примерно в 2 раза жестче, чем на установку излучателя.

При изменении параметров b, n, φ фазовый фронт будет не только искажаться, но и отклоняться, что приведет к смещению максимума диаграммы направленности.

На рис. 12 приведена зависимость угла отклонения луча α от изменения n и b и, кроме того, здесь же приведена зависимость величины фазовой ошибки Δ/R_0, которая в данном случае характеризует искажения уже наклонного фазового фронта. Наконец, на рис. 13 приведены аналогичные кривые α и Δ/R_0 в зависимости от изменения угла наклона зеркала φ.

Таким образом, по кривым рис. 11, 12, 13 можно для данного размера большого зеркала установить допуск на точность установки излучателя и малого зеркала в сферической двухзеркальной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Бахрах, Тр. НИИ МАП, 1954, вып. 11(33).
2. A. K. Head, Nature, 1957, 179, 6.
3. W. Rotman, IRE Trans., 1958, AP-6, 1
4. И. В. Вавилова, Тр. НИИ МАП, 1954, вып. 11(33).
5. J. A. C. Jackson, E. C. A. Goodall, Marconi Rev., 1 st quarter, 1958, 21, 128, 30.
6. J. M. Flaherty, E. Kadak, IRE Nat. Convention Record, part 1, 1958.
7. Л. Д. Бахрах, Тр. НИИ МАП, 1953, вып. 3.
8. Kellecher, J. Appl. Phys., 1950, 21, 6, 573.

Поступила в редакцию
28 X 1960

РАСЧЕТ ПОПУТНОГО ПОТОКА В ДЛИННОЙ ВОЛНОВОДНОЙ ЛИНИИ

Р. Ф. Матвеев

Рассчитана средняя мощность попутного потока, возникающего в длинной волноводной линии при передаче по ней импульсных сигналов. Неоднородности линии, приводящие к возникновению попутного потока, подразделяются на сосредоточенные (расположенные приблизительно на равных расстояниях) и распределенные. И те и другие предполагаются случайными (меняющимися от трубы (волноводной) к трубе или от линии к линии).

При передаче по волноводу волны H_{01} (основной) она претерпевает на неоднородностях линии частичные преобразования в другие типы волн (паразитные). Эти паразитные волны частично преобразуются снова в основную волну, распространяющуюся в том же направлении, что и первоначальная волна, несущая сигнал, но сдвинутую по времени относительно этой последней. Возникает так называемый попутный поток, искажающий полезный сигнал. Как показано в [2, 3], если мощность попутного потока мала по сравнению с мощностью сигнала, то можно считать, что попутный поток образуется лишь в результате двойного преобразования: основная волна → паразитная волна → основная волна. При этом большое значение для расчета потока имеет величина $dq(z)$ — отношение амплитуды паразитной волны, образовавшейся на малой неоднородности волновода на отрезке $(z, z + dz)$ (ось z направлена вдоль оси волновода), к амплитуде основной волны в точке z. Обозначим через $a\ (z, \theta)$ истинный радиус волновода (z, θ — цилиндрические координаты); a_0 — среднее значение $a\,(z, \theta)$. Обозначим также

$$q_p(z) = \frac{1}{\varepsilon_p a_0 \pi} \int_0^{2\pi} [a(z, \theta) - a_0]\, e^{ip\theta}\, d\theta,$$

где $\varepsilon_0 = 2$; $\varepsilon_p = 1$ для $p > 0$.

Функция $q_p(z)$ разлагается на сумму:

$$q_p(z) = q_{1p}(z) + q_{2p}(z),$$

где $q_{1p}(z)$ — непрерывная функция; $q_{2p}(z)$ — ступенчатая функция. Скачки $q_{2p}(z)$ будут находиться, например, в точках z_1, z_2, ... стыка двух труб волновода. Если стыки отсутствуют, то можно положить $q_{2p}(z) \equiv 0$. Тогда величину $dq\,(z)$ (для случая, когда паразитная волна есть волна H_{pm}) можно представить в виде

$$dq\,(z) = c_1\,(p,\ m)\, dq_{1p}\,(z) + c_2\,(p,\ m)\, dq_{2p}\,(z), \qquad (1)$$

где c_1 и c_2 — константы, зависящие только от типов паразитных волн (см. [2]). В дальнейшем для простоты записи мы не будем писать индексы p и m.

Допустим, что $q_1\,(z)$ является стационарным случайным гауссовским процессом с функцией корреляции, равной $\sigma_1^2 B\,(z)$ ($B\,(0) = 1$). Допустим, что скачки $dq_2\,(z)$ в дискретных точках z_1, z_2, ... являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с дисперсиями,

равными σ_2^2. Считаем также, что величины $dq_1(x)$ и $dq_2(y)$ независимы для любых x и y. В дальнейшем, так же, как и в [1], считаем, что сосредоточенные неоднородности расположены на расстоянии $L + \eta_j$ друг от друга ($j = 1, 2, \ldots$). Здесь L — средняя длина трубы; η_j — случайные независимые величины с равномерным распределением на отрезке $(-\delta, \delta)$; $\delta / L \ll 1$.

Обозначим через $E_n(z, t)$ напряженность попутного потока в точке z волновода, через $E_0(z)$ — амплитуду основной волны, несущей сигнал, в этой же точке. Вероятностные характеристики величины $E_n(z,t)/E_0(z)$ с учетом преобразования основной волны в паразитные волны только на сосредоточенных неоднородностях вычислены в волны [1]. Принимая все предположения этой статьи о механизме образования попутного потока и о характере идущих по линии сигналов, рассчитаем попутный поток с учетом как сосредоточенных, так и распределенных неоднородностей. Предполагаем, что полезный сигнал есть совокупность случайно чередующихся импульсов прямоугольной формы и пауз одной и той же длительности τ. Относительная частота появления импульса или паузы в этой совокупности равна p или $1-p$. Тогда попутный поток $E_n(z, t)$, вызванный бесконечной последовательностью таких чередующихся пауз и импульсов, можно представить как сумму (ср. с [1, 3]):

$$E_n(z, t) = E_0(z) \sum_k \varepsilon_k \int_0^z dq(x) \int_x^z \chi_{[0,\tau]}\left(t - k\tau - \frac{z}{v_1} - \theta(y - x)\right) \times \\ \times e^{-\beta_1(y-x)} \cos[\omega t - \varphi_k - \beta_2(y - x)]\, dq(y) \qquad (2)$$

(k-е слагаемое представляет собой попутный поток, вызванный прохождением по волноводу k-го импульса).

Здесь $\beta_1 = \alpha_n - \alpha_1$; α_n, α_1 — коэффициенты затухания по амплитуде паразитной и основной волн; $\beta_2 = h_n - h_1$; h_n, h_1 — фазовые постоянные паразитной и основной волн; $\theta = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_1}$; v_n, v_1 — групповые скорости паразитной и основной волн; φ_k — начальная фаза k-го импульса; величины $\{\varphi_k\}$ — суть взаимно независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $(0, 2\pi)$; ω — несущая частота;

$$\chi_{[0,\tau]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ для } t \in (0, \tau), \\ 0 \text{ для } t \bar{\in} (0, \tau); \end{cases}$$

ε_k — взаимно независимые случайные величины, равные каждая единице с вероятностью p и нулю с вероятностью $1 - p$. В выражении (2) k-е слагаемое будет отлично от тождественного нуля (при фиксированных z, t), если только k меняется в таких пределах, чтобы $0 \leqslant t - k\tau - \frac{z}{v_1} - \theta(y - x) \leqslant \tau$, где $x \leqslant y \leqslant z$.

Вводя новый индекс суммирования $l = \frac{t - \frac{z}{v_1}}{\tau} - k$ и изменяя порядок интегрирования в (2), получим

$$\frac{E_n(z, t)}{E_0(z)} = A(z) \cos \omega t + B(z) \sin \omega t, \qquad (3)$$

где

$$\left.\begin{matrix} A(z) \\ B(z) \end{matrix}\right\} = \sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}} \varepsilon_l \int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{\frac{l\tau}{\theta}} dq(y) \int_0^y e^{-\beta_1(y-x)} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} [\varphi_l + \beta_2(y - x)]\, dq(x). \qquad (4)$$

Для дальнейшего изложения сделаем допущения:

$$\text{I.}\quad \beta_1 z \gg 1,\quad \text{II.}\quad \beta_1 z_c \ll 1,\quad \text{III.}\quad \frac{z\theta}{\tau} \gg 1$$

$$\text{IV.}\quad \frac{z_c\,\theta}{\tau} \ll 1,\quad \text{V.}\quad \frac{\beta_1^2 z\delta^2}{L} \ll 1$$

— радиус корреляции случайного процесса $q_1(z)$).

Наложим некоторое дополнительное ограничение на процесс $q_1(z)$. Оно ключается, грубо говоря, в том, что случайные величины $q_1(z)$ и $q_1(z+z_0)$ ановятся независимыми при $z_0 \to \infty$ и произвольных z. Строго говоря, предложим, что $q_1(z)$ обладает свойством сильного перемешивания [4] им свойством, в частности, обладают стационарные гауссовские процес-, чьи спектральные плотности являются дробно-рациональными функями). Тогда из результатов работы [4] (теорема 1. 1) вытекает, что и больших z величины $A(z)$ и $B(z)$ асимптотически нормальны, а согласно теореме § 21 работы [5], их совместное распределение также стремится нормальному. Поскольку $A(z)$ и $B(z)$ некоррелированы, то, следовательно, и больших z их можно считать независимыми. А тогда вероятностные рактеристики отношения $E_n(z,t)/E_0(z)$ полностью определяются математическими ожиданиями величин $A(z)$ и $B(z)$ (которые равны нулю) и их дисперсиями, которые вычислены ниже

$$M\{A(z)\}^2 = M\{B(z)\}^2 = \frac{p}{2}\sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}} \int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{\frac{l\tau}{\theta}} \int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{\frac{l\tau}{\theta}} \times$$

$$\times \int_0^{y_1}\int_0^{y_2} e^{-\beta_1(y_1+y_2-x_1-x_2)} \cos[\beta_2(y_1-y_2-x_1+x_2)]\, M\{dq(x_1)\,dq(x_2)\,dq(x_3)\,dq(x_4)\} \tag{5}$$

спользуя равенство (1) и гауссовость процесса $q_1(z)$, получим

$$\begin{aligned} M\{dq(x_1)\,dq(x_2)\,dq(x_3)\,dq(x_4)\} &= [(c_1\sigma_1)^4 B''(x_1-x_2)B''(y_1-y_2) + \\ &+ (c_1\sigma_1)^4 B''(x_1-y_1)B''(x_2-y_2) + (c_1\sigma_1)^4 B''(x_1-y_2)B''(x_2-y_1)] - \\ &- (c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 B''(x_1-x_2)\,dx_1\,dx_2\,M\{dq_2(y_1)\,dq_2(y_2)\} - \\ &- (c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 B''(y_1-y_2)\,dy_1\,dy_2\,M\{dq_2(x_1)\,dq_2(x_2)\} - \\ &- (c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 B''(x_1-y_2)\,dx_1\,dy_2\,M\{dq_2(x_2)\,dq_2(y_1)\} - \\ &- (c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 B''(x_2-y_1)\,dx_2\,dy_1\,M\{dq_2(x_1)\,dq_2(y_2)\} + \\ &+ (c_2\sigma_2)^4 M\{dq_2(x_1)\,dq_2(x_2)\,dq_2(y_1)\,dq_2(y_2)\}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$B''(x) = \frac{d^2}{dx^2}B(x).$$

Соответственно сумма (5) разобьется на шесть сумм, которые обозначим $\Sigma_1(z), \ldots, \Sigma_6(z)$ (первые три члена в квадратных скобках равны (z). а далее следуем тому же порядку, что и в выражении (6)). Точный счет всех этих сумм весьма сложен и не является необходимым. Вполне статочно вычислить пределы $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Sigma_k(z)}{z}$ для $k=\overline{1,6}$ (когда здесь и ниже шем $z\to\infty$, то имеем в виду, что z меняется в пределах, обусловленных пущениями I, III, V).

Применяя правило Лопиталя ($\Sigma_1(z) \to \infty$ при $z \to \infty$), получим

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_1(z)}{z} = \frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{\theta}{\tau}\left\{\int_0^{\tau/\theta}dy_1\int_0^{\tau/\theta}dy_2\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}e^{-\beta_1(y_1+y_2-x_1-x_2)}\times\right.$$
$$\times\cos\beta_2(y_1-y_2-x_1+x_2)\,[B''(x_1-x_2)\,B''(y_1-y_2)+$$
$$\left.+B''(x_1-y_1)\,B''(x_2-y_2)+B''(x_1-y_2)\,B''(x_2-y_1)]\,dx_2\,dx_1\right\}\equiv J_{11}+J_{12}+J_{13}.$$

Вычислим отдельно три получившихся интеграла:

$$J_{11} = \frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{\theta}{2\beta_1\tau}\int_0^{\tau/\theta}\left(\frac{\tau}{\theta}-s\right)ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\Delta_1|s-t|}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(s-t)\,dt$$

В силу допущения IV

$$J_{11}\simeq\frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{1}{\beta_1}\int_0^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta_1|s-t|}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(s-t)\,dt,$$

$$J_{12} = \frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{\tau}{2\theta}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\Delta_1(t+s)}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(t-s)\,dt\,ds.$$

В силу допущения II

$$J_{12}\simeq\frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{\tau}{\theta}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(t-s)\,ds\,dt=$$
$$=\frac{p}{2}(c_1\sigma_1)^4\frac{\tau\beta_2^2}{\theta}\left\{\left[\beta_2\int_0^{\infty}B(t)\cos\beta_2\,tdt\right]^2+\left[1-\beta_2\int_0^{\infty}B(t)\sin\beta_2\,tdt\right]^2\right\},$$

$$J_{13} = p(c_1\sigma_2)^4\frac{\theta}{\tau}\int_0^{\tau/\theta}\left(\frac{\tau}{\theta}-x\right)dx\int_{-x}^{\infty}dt\int_x^{\infty}e^{-\beta_1(t+s)}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(2x+t-s)$$

В силу допущений II и IV

$$J_{13}\simeq p(c_1\sigma_1)^4\int_0^{\infty}dx\int_{-x}^{\infty}dt\int_x^{\infty}B''(t)\,B''(s)\cos\beta_2(2x+t-s)\,ds=$$
$$=\frac{p(c_1\sigma_1)^4}{\beta_2}\int_0^{\infty}B''(s)\,ds\int_0^{s}B''(t)\sin\beta_2(s-t)\,dt+$$
$$+\frac{p(c_1\sigma_1)^4}{\beta_2}\int_0^{\infty}B''(s)\,ds\int_0^{\infty}B''(t)\sin\beta_2(s+t)\,dt.$$

Переходя в интегралах J_{11} и J_{13} от $B''(t)$ к $B(t)$, получаем окончательно

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_1(z)}{z} = p(c_1\sigma_1)^4\beta_2^2\left\{\frac{\beta_2^2}{2\beta_1}\int_0^{\infty}B(s)\,ds\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta_1|t-s|}B(t)\cos\beta_2(s-t)\,dt+\right.$$
$$+\frac{\tau}{2\theta}\left[\beta_2\int_0^{\infty}B(t)\cos\beta_2\,tdt\right]^2+\frac{\tau}{2\theta}\left[1-\beta_2\int_0^{\infty}B(t)\sin\beta_2\,tdt\right]^2+$$
$$\left.+2\int_0^{\infty}B^2(t)\,dt+6\beta_2\int_0^{\infty}B(s)\sin\beta_2\,sds\int_0^{s}B(t)\cos\beta_2\,tdt\right\}\equiv F_1. \qquad (7)$$

Продолжаем вычисления:

$$\sum_6(z) = \frac{p}{2}(c_2\sigma_2)^4 \sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}} \sum_{j=\frac{(l-1)\tau}{L\theta}}^{\frac{l\tau}{L\theta}} \sum_{m=1}^{j-1} e^{-2\beta_1(j-m)L},$$

откуда

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_6(z)}{z} = \frac{p(c_2\sigma_2)^4}{4\beta_1 L^2}.$$

При $q_1(z) \equiv 0$ $M\{A(z)\}^2 = \Sigma_6(z)$, что совпадает с результатом [1].

$$\sum_2(z) = \frac{p}{2}(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 \sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}} \sum_{k=\frac{(l-1)\tau}{L\theta}}^{\frac{l\tau}{L\theta}} \int_0^{kL+\sum_1^k\eta_j} e^{-\beta_1\left(2kL+2\sum_1^k\eta_j-x_1-x_2\right)} \times$$

$$\times B''(x_1-x_2)\cos\beta_2(x_1-x_2)\,dx_2,$$

откуда

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_2(z)}{z} = -\frac{p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2}{2\beta_1 L}\beta_2^2\int_0^\infty B(t)\cos\beta_2 t\,dt;$$

$$\sum_3(z) = p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2 \sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}} \int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{\frac{l\tau}{\theta}} dy_1 \int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{y_1} \sum_{k=1}^{\frac{y_2L}{L}} e^{-\beta_1\left(y_1+y_2-2kL-2\sum_1^k\eta_j\right)} \times$$

$$\times B''(y_1-y_2)\cos\beta_2(y_1-y_2)\,dy_2,$$

Усредняя эту сумму по η_j,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_3(z)}{z} = \frac{p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2\theta}{\tau}\times$$

$$\int_0^{\tau/\theta} dy_1 \int_0^{y_1} e^{-\beta_1\left(y_1+y_2-2z+\frac{2\tau}{\theta}\right)} \sum_{k=1}^{\frac{y_2+z-\frac{\tau}{\theta}}{L}} e^{-2\beta_1 kL} M_\eta^k \cos\beta_2(y_1-y_2)\,B''(y_1-y_2)\,dy_2,$$

$$M_\eta \equiv Me^{-2\beta_1\eta_j} \simeq e^{\frac{2}{3}(\beta_1\delta)^2}.$$

В силу допущения V о верхней границе изменения z $M_\eta^k - 1 \ll 1$ для $k \leqslant z/L$, поэтому

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Sigma_3(z)}{z} = \frac{p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2\theta}{2\beta_1 L\tau}\int_0^{\tau/\theta} dy_1\int_0^{y_1} e^{-\beta_1(y_1-y_2)}B''(y_1-y_2)\cos\beta_2(y_1-y_2)\,dy_2 =$$

$$= -\frac{p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2}{2\beta_1 L}\beta_2^2\int_0^\infty B(t)\cos\beta_2 t\,dt,$$

$$\sum_4(z) - \sum_5(z) = \frac{p(c_1c_2\sigma_1\sigma_2)^2}{2}\sum_{l=1}^{\frac{z\theta}{\tau}}\int_{\frac{(l-1)\tau}{\theta}}^{\frac{l\tau}{\theta}} dy\times$$

$$\times \sum_{k=\frac{(l-1)\tau}{L\theta}}^{\frac{y/L}{L}} \int_0^{kL} e^{-\beta_1(y-x)}\cos\beta_2\left(2kL+2\sum_1^k\eta_j-y-x\right)B''(y-x)\,dx.$$

Сумма $\sum_1^k \eta_j$ при любом k, взятая по mod 2π, есть случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $(0, 2\pi)$. Усредняя эту сумму по η_j, получаем поэтому

$$\sum_4(z) = \sum_5(z) = 0.$$

Запишем окончательное выражение для искомых дисперсий величин $A(z)$ и $B(z)$ (см. (4)):

$$\lim_{z\to\infty}\frac{M\{A(z)\}^2}{z} = \lim_{z\to\infty}\frac{M\{B(z)\}^2}{z} = \frac{p\gamma_1^2}{4\beta_1} + F_1 - \frac{p(c_1\sigma_1)^4\beta_2^2}{\beta_1}\left[\beta_2\int_0^\infty B(t)\cos\beta_2 t dt\right]^2, \quad (8)$$

где величина F_1 определяется равенством (7), а

$$\gamma_1 = \frac{(c_2\sigma_2)^2}{L} + 2\beta_2^2(c_1\sigma_1)^2\int_0^\infty B(t)\cos\beta_2 t dt. \quad (9)$$

Сделаем одно упрощающее предположение, а именно: будем считать, что $z_c\beta_2 \leqslant 1$ (z_c — радиус корреляции процесса $q_1(z)$).

Физически — это ограничение снизу на ширину спектра $q_1(z)$, так как ширина спектра обратно пропорциональна z_c. В таком случае нетрудно проверить, что в выражении (7) два последних слагаемых на несколько порядков меньше первых и поэтому

$$F_1 \simeq \frac{p(c_1\sigma_1)^4\beta_2^2}{\beta_1}\left\{\left[\beta_2\int_0^\infty B(t)\cos\beta_2 t dt\right]^2 + \frac{\beta_1\tau}{2\theta}\left[1 - \beta_2\int_0^\infty B(t)\sin\beta_2 t dt\right]^2\right\}.$$

Выражение (8) переписывается теперь следующим образом:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{M\{A(z)\}^2}{z} = \frac{p}{4\beta_1}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \quad (10)$$

где коэффициент γ_1 определен выше, а

$$\gamma_2^2 = 2(c_1\sigma_1)^4\frac{\beta_1\beta_2^2\tau}{\theta}\left[1 - \beta_2\int_0^\infty B(t)\sin\beta_2 t dt\right]. \quad (11)$$

Выясним физический смысл коэффициента γ_1. Как нетрудно подсчитать, учитывая предположение о статистической независимости потерь на различных стыках, величина $(c_2\sigma_2)^2\frac{z}{L}$ представляет собой средние потери на преобразование в паразитную волну только на стыках. Вычислим потери на преобразование на распределенных неоднородностях в волноводе длины z. Согласно формуле (8) работы [2], отношение амплитуды паразитной волны в конце линии к амплитуде основной волны выражается интегралом

$$\sigma_1\hat{c}_1\int_0^z q_1(x)e^{-i\beta_2 x}dx,$$

где $q_1(x)$ определена формулой (1), а константы c_1 из (1) и $\hat{c}_1$ связаны соотношением $|c_1\beta_2| = |c_1|$. Таким образом, средние потери на преобразование на распределенных неоднородностях равны

$$\sigma_1^2|\hat{c}_1|^2 M\left|\int_0^z q_1(x)e^{-i\beta_2 x}dx\right|^2 = 2\beta_2^2(c_1\sigma_1)^2\int_0^z (z-x)B(x)\cos\beta_2 x dx.$$

Складывая полученные выражения для потерь на стыках и на распределенных неоднородностях, относя их к длине линии z и переходя к пределу

и $z \to \infty$, получим, что средний погонный коэффициент затухания основ-
й волны равен

$$\frac{(c_2\sigma_2)^2}{L} + 2\beta_2^2 (c_1\sigma_1)^2 \int_0^\infty B(t) \cos \beta_2 t dt = \gamma_1.$$

метим, что такая же формула несколько другим способом полу-
на в [6].

В [3] получена формула для мощности попутного потока, отнесенной
ощности сигнала ($p_n(z)/p_0(z)$). В наших обозначениях эта формула выгля-
г следующим образом:

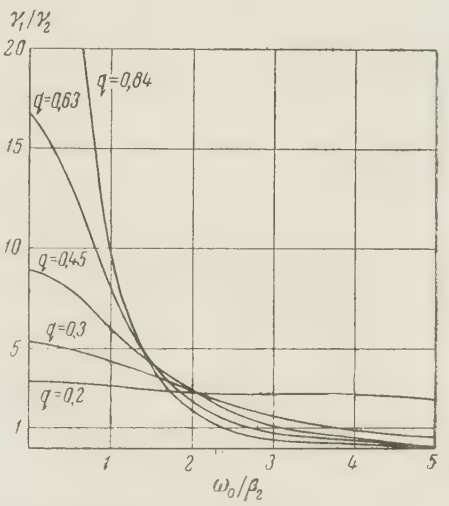
$$\frac{p_n(z)}{p_0(z)} = \frac{pz\gamma_1^2}{2\beta_1}. \qquad (12)$$

рмула была получена при некоторых допущениях о механизме образова-
я попутного потока: предполагалось, что отношение мощности, образо-
вшейся на отрезке $(z, z + \Delta z)$
разитной волны, к мощности
игнала в точке z равно $\gamma_1 \Delta z$.
роведенный выше расчет показы-
ет, что формулу работы [3] нуж-
заменить другой:

$$\frac{p_n(z)}{p_0(z)} = \frac{pz}{2\beta_1}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2). \qquad (13)$$

исутствие добавочного коэффи-
ента γ_2 обязано прерывистому
рактеру передаваемых по линии
игналов.

Заметим, однако, что расчет
путного потока по формуле (12)
ачительно проще, чем по форму-
(13), поскольку в последнем
учае необходимо знать функцию
реляции $B(z)$, а в первом слу-
е можно в принципе обойтись
нее. Поэтому интересно вы-
нить, в каких случаях можно
льзоваться формулой (12), иначе говоря, когда $\gamma_1/\gamma_2 \gg 1$? Из (9) и (11)
лучаем (пренебрегая потерями на стыках)



Отношение коэффициентов γ_1/γ_2 в зависимости от ω_0/β_2 при различных значениях q

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{2\theta}{\beta_1\tau}} \sqrt{\frac{\left|3_2 \int_0^\infty B(t) \cos \beta_2 t dt\right|}{\left|1 - \beta_2 \int_0^\infty B(t) \sin \beta_2 t dt\right|}}. \qquad (14)$$

и $\beta_2 z_c \to 0$ отношение (14) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \sqrt{\frac{2\theta}{\beta_1\tau}} \frac{\beta_2 z_c}{1 - \beta_2 z_c} \to 0$ при любой функции
реляции. Следовательно, формула (12) неверна при радиусах корре-
ции, малых по сравнению с β_2 (примерно при $z_c < \frac{1}{\beta_2}\sqrt{\frac{\beta_1\tau}{2\theta}}$). Вопрос
поведении отношения (14) при $1 > \beta_2 z_c > \sqrt{\frac{\beta_1\tau}{2\theta}}$ требует более деталь-
го исследования.

Мы ограничимся одним конкретным примером. Пусть функция корреляции

$$B(z) = \left(1 + \frac{|z|}{z_c}\right) e^{-\frac{|z|}{z_c}} \cos \omega_0 z. \quad (15)$$

Соответствующая спектральная плотность

$$f(\omega) = \int_0^\infty B(z) \cos \omega z dz = \frac{z_c}{[1 + (\omega_0 - \omega)^2 z_c^2]^2} + \frac{z_c}{[1 + (\omega_0 + \omega)^2 z_c^2]^2}. \quad (16)$$

Случайный процесс $q_1(z)$ с такой функцией корреляции, по нашему мнению, характеризует неоднородности линии во всяком случае лучше, чем процессы с корреляционными функциями $B(z) = e^{-\left(\frac{z}{z_c}\right)^2}$ или $B(z) = \sin \Omega z / \Omega z$, поскольку последние однозначно определяются своими начальными значениями.

На рисунке приведены графики отношения γ_1/γ_2 как функции величины ω_0/β_2 при различных значениях $q = \beta_2 z_c$. Расчет произведен в предположениях: 1) $q_1(z) = q_{11}(z)$; $m = 2$ (см. (1)); таким образом, речь идет о попутном потоке, вызванном волной H_{12}; 2) диаметр волновода равен 60 *мм*; 3) длина распространяющейся волны 8 *мм*; 4) $\tau = 5 \cdot 10^{-9}$ *сек*. В этом случае $\beta_2 = 0{,}1$ *см*$^{-1}$; $\beta_1 = 0{,}283 \cdot 10^{-5}$ *см*$^{-1}$; $\theta = 45 \cdot 10^{-14}$ *сек/см* и допущения 1 — V сводятся к следующим: 3 *км* $\ll z \ll 50\,000$ *км*, $z_c \ll 100$ *м*; γ_1/γ_2 становится меньше единицы при $q < 0{,}07$. При таких q можно считать, что $\gamma_2^2 = \beta_2^2 (c_1\sigma_1)^4 \frac{2\beta_1\tau}{\theta}$.

Из рисунка видно, что формула (12) тем ближе к формуле (13), чем больше длина волны колебаний оси волновода (величина $q_{11}(z)$, как не трудно проверить, характеризует колебания оси).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Бунимович, В. А. Морозов, О вероятности искажений, вызванных попутным потоком и гауссовым шумом, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 10, 1585.
2. Б. З. Каценеленбаум, В. В. Малин, Формирование попутного потока в длинной волноводной линии, ч. 2, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 11, 1389.
3. Б. З. Каценеленбаум, В. В. Малин, Формирование попутного потока в длинной волноводной линии, ч. 1, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 6, 750.
4. В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случайных функций, Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, 2, 186.
5. С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, 1944, 10, 65.
6. N. Larsen, Die Übertragunseigenschaften von H_{01}-Hohlleitungen mit statisch verteilten Unregelmäßigkeiten, Frequenz, 1960, 14, 4, 135.

Поступила в редакцию
27 VIII 1960

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ТЕЛЕВИЗИОННЫХ СИСТЕМ С РАЗЛИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РАЗЛОЖЕНИЯ *

С. Б. Гуревич

Выведена формула для удельной и полной чувствительности телевизионных систем и рассмотрена связь чувствительности с количеством передаваемой информации.

Чувствительность передающего устройства вещательной телевизионной системы с заданным стандартом разложения в литературе принято оценивать величиной, обратной величине освещенности объекта, при которой обеспечивается получение на экране приемной трубки изображения удовлетворительного качества [1, 2, 3].

Это определение чувствительности имеет ограниченный характер, так как позволяет сравнивать между собой только системы с одинаковыми параметрами разложения и одинаковыми требованиями к качеству изображения, например вещательные телевизионные системы. Для того же, чтобы иметь возможность сравнивать по чувствительности две любые телевизионные системы, определение чувствительности должно содержать фактор, количественно характеризующий качество изображения (в случае отсутствия нелинейных искажений выражаемый количеством информации об объекте, передаваемым системой), и фактор, характеризующий величину энергии излучения, приходящейся на единицу информации об объекте.

Повышая эффективность преобразования лучистой энергии в сигналы изображения и сводя к минимуму увеличение уровня шумов при усилении сигнала, можно повысить чувствительность телевизионной системы. Однако увеличение чувствительности не может производиться без ограничений: предельной явится чувствительность, определяемая флуктуациями квантов лучистого потока.

Качество движущегося изображения в отсутствие искажений, вызванных нелинейным характером преобразований в монохроматических телевизионных устройствах, количественно можно охарактеризовать числом элементов изображения N, количеством различимых градаций яркости m и числом кадров (числом передаваемых состояний объекта) n. При таком представлении качества изображения чувствительность передающих устройств выражается функцией

$$G = G(\varepsilon_0, N, m, n), \qquad (1)$$

где ε_0 — лучистая энергия одного элемента, необходимая для создания видной, отличной от фона, градации на уровне фона $\varepsilon = 0$.

Получим соотношение, связывающее чувствительность с ε_0, N, m, n. Рассмотрим сперва однократную передачу одного элемента с различением в нем только одной градации, отличной от нуля энергии излучения. Энергия излучения, характеризующая данный элемент, может быть обнаружена только в том случае, если среднее значение ее в заданное число раз (обозначим это число через k) больше своих флуктуаций, т. е. если $\varepsilon = k\varepsilon_\Phi$. Известно далее [4], что флуктуацию лучистой энергии (для не слишком длинноволнового излучения) можно приближенно представить

* Доложено на научных сессиях, посвященных «Дню Радио», 19 апреля 1960 г. в Ленинграде и 19 мая 1960 г. в Москве.

в виде

$$\varepsilon_{\Phi} = \sqrt{\overline{\Delta\varepsilon^2}} = \sqrt{\overline{\Delta\mu^2}\,\overline{(h\nu)^2}} = \sqrt{\bar{\mu}}\,h\nu, \tag{2}$$

где $\overline{\Delta\varepsilon^2}$ — квадратичная флуктуация лучистой энергии; $\bar{\mu}$ — среднее число квантов, соответствующее средней энергии $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\mu}h\nu$, где h — постоянная планка, ν — частота или, в случае немонохроматического света, средняя частота. Для различения одной отличной от нуля градации энергии излучения при однократной передаче одного элемента необходимо принять среднюю энергию

$$\bar{\varepsilon}_0 = k\varepsilon_{0\Phi} = k\sqrt{\bar{\mu}}\,h\nu = k^2 h\nu, \tag{3}$$

так как

$$\sqrt{\bar{\mu}} = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{\bar{\mu}}} = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_{0\Phi}} = k.$$

Оценим величину энергии ε_m, обеспечивающую возможность различения m градаций, если передачу одной отличной от нуля градации обеспечивает энергия излучения $\bar{\varepsilon}_0 = k^2 h\nu$. Передача i-й градации будет обеспечена в том случае, если выполняется соотношение

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} = k\sqrt{\bar{\mu}_i + \bar{\mu}_{i-1}}\,h\nu = k\sqrt{(\bar{\varepsilon}_i + \bar{\varepsilon}_{i-1})h\nu}. \tag{4}$$

Точно так же, как в случае одной отличной от нуля градации, разность между энергиями, обеспечивающими соответственно передачу i и $i-1$ градаций, должна в k раз превышать энергию шумов, которая в данном случае составляет геометрическую сумму шумов, сопровождающих энергии излучения ε_i и ε_{i-1}. Выражение, аналогичное (4), приведено в работе [5].

Можно показать, что с учетом (3) условие (4) для любого i будет выполнено в том случае, если

$$\varepsilon_i = \frac{i}{2}(i+1)\,k^2 h\nu, \tag{4а}$$

и, следовательно, для передачи m градаций потребуется энергия ε_m, превышающая энергию, потребную для передачи одной градации, в $l = \frac{m}{2}(m+1)$ раз, т. е.

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 \frac{m}{2}(m+1) = \frac{m}{2}(m+1)\,k^2 h\nu. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что число различимых градаций энергии m больше числа, характеризующего отношение величины энергии ε_m, обеспечивающей передачу m градаций, к величине, в k раз превышающей энергию шумов, т. е. величины ψ_m/k (ψ — отношение сигнал/шум). Действительно,

$$m' = \frac{\bar{\varepsilon}_m}{k\varepsilon_{m\Phi}} = \frac{\psi_m}{k} = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_m}{k^2 h\nu}} = \sqrt{\frac{\frac{m}{2}(m+1)\,\bar{\varepsilon}_0}{k^2 h\nu}} = \sqrt{\frac{m}{2}(m+1)} < m,$$

если $m > 1$. Это неравенство является следствием того обстоятельства, что при наличии указанной выше зависимости флуктуаций от величины сигнала «ступени» градаций уменьшаются при уменьшении величины энергии.

Очевидно, что при необходимости различить m градаций в N элементах при передаче n состояний объекта требуемая энергия должна быть не меньше, чем

$$\bar{\varepsilon}_{(m,N,n)} = \frac{m}{2}(m+1)\,Nnk^2 h\nu. \tag{6}$$

Учитывая, что индикатор излучения принимает только часть энергии, излучаемой объектом (в случае изотропного излучения $\alpha = \frac{1}{\frac{\pi D^2}{4} 3^2 \gamma}$, где D — диаметр зрачка объектива, проектирующего изображение объекта на чувствительную поверхность; β — угол, под которым виден объект из плоскости объектива; γ — коэффициент поглощения излучения в объективе), получим значение для минимальной лучистой энергии, излучаемой объектом и требуемой для различения m градаций в N элементах при n повторениях в идеальном случае, когда в дальнейшем передающее устройство не ухудшает различимость градаций в этих элементах:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{об}(m,N,n)} = \alpha k^2 h\nu \frac{m}{2} (m+1) Nn. \tag{7}$$

В действительности передающие устройства не являются идеальными, и для сохранения того же количества информации об объекте потребуется увеличить количество энергии, поступающей на вход устройства. Иначе говоря, для неидеальной системы сохранение необходимого выходного отношения сигнал/шум потребует увеличения отношения сигнал/шум на входе. Введем фактор

$$\xi = \frac{\psi_{\text{вых}}}{\psi_{\text{вх}}}, \tag{8}$$

где $\psi_{\text{вых}}$ — отношение сигнал/шум на выходе передающего устройства, при котором обеспечивается передача N элементов, m градаций и n состояний объекта и которое было бы достаточным на входе устройства, если бы система была идеальной ($\psi_{\text{вых}} = \psi_{\text{вх ид}}$). Таким образом, $\psi_{\text{вых}} = \bar{\varepsilon}_{\text{об}(m,N,n)} / \sqrt{\bar{\varepsilon}_{\text{об}(m,N,n)} h\nu}$, в то время как входное отношение сигнал/шум $\psi_{\text{вх}} = \bar{\varepsilon}/\sqrt{\bar{\varepsilon} h\nu}$, где $\bar{\varepsilon}$ — энергия, которую требуется подать на вход неидеальной системы, характеризуемой коэффициентом $\xi = \sqrt{\bar{\varepsilon}_{\text{об}(m,N,n)}/\bar{\varepsilon}}$. Эта энергия определяется теперь выражением

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\alpha k^2 h\nu}{\xi^2} \frac{m}{2} (m+1) Nn, \tag{9}$$

а чувствительность

$$G = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\xi^2}{\alpha k^2 h\nu} \frac{1}{Nn \frac{m}{2} (m+1)}.$$

Обозначим через g величину

$$g = \frac{\xi^2}{\alpha k^2 h\nu} \tag{10}$$

и назовем ее удельной чувствительностью. Удельная чувствительность представляет собой величину, обратную энергии, которую должен был бы излучать один элемент объекта для того, чтобы в реальной системе с $\xi = \psi_{\text{вых}}/\psi_{\text{вх}}$ различить на выходе одну отличную от нуля градацию лучистой энергии.

Величина G через g выражается соотношением

$$G = g \frac{1}{\frac{m}{2} (m+1) Nn}. \tag{11}$$

Выражение (9), полученное для характеристики предельной чувствительности передающих телевизионных систем, позволяет связать энергию, переносимую от объекта на вход передающего устройства, с количеством передаваемой информации об объекте.

Известно [6], что если в передаваемом элементе возможно $m+1$ различных состояний (например, m отличных от нуля градаций лучистой энергии и энергия, равная нулю), а таких элементов Nn, то число возможных сообщений равно $(m+1)^{Nn}$ и количество информации, содержащейся в таком числе возможных сообщений, выражается

$$J = Nn \log_2 (m+1). \tag{12}$$

При числе элементов и состояний объекта, равных единице, а также при возможности передачи лишь одного значения яркости, отличного от нулевой ($m=1$), J также равно единице.

Сравнивая выражения (9) и (12), мы видим, что как требуемая энергия излучения, так и передаваемое количество информации линейно зависит от числа элементов и числа передаваемых состояний объекта. Зависимость же от числа различных градаций существенно различна: требуемая энергия излучения увеличивается быстрее, чем увеличивается число градаций [$\varepsilon \sim \frac{m}{2}(m+1)$], тогда как количество сведений увеличивается медленнее роста градаций [$J \sim \log_2(m+1)$].

Энергия излучения от объекта, приходящаяся на единицу информации, выражается отношением

$$\frac{\varepsilon}{J} = \frac{\alpha k^2 h\nu}{\xi^2} \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{\log_2 (m+1)} = \frac{1}{g} \frac{m(m+1)}{\log_2 (m+1)^2}. \tag{13}$$

При $m \gg 1$

$$\frac{\varepsilon}{J} = \frac{1}{g} \frac{m^2}{\log_2 m^2}. \tag{13а}$$

Нетрудно видеть, что при $m=1$ величина, обратная ε/J, равна g и, следовательно, удельную чувствительность можно определить как величину, обратно пропорциональную энергии, приходящейся на единицу информации.

Из выражений (9), (12) и (13) следует, что с точки зрения увеличения количества информации об объекте энергетически выгоднее увеличивать число элементов, чем число различных градаций.

Следует, однако, оговориться, что этот вывод относится к количеству сведений об объекте безотносительно к свойствам приемника информации. Так, например, при передаче изображения увеличение числа элементов сверх $(4-8)\cdot 10^5$ продолжает повышать количество информации об объекте пропорционально числу элементов, однако эти дополнительные элементы при визуальном наблюдении теряются. Если при этом число различимых градаций мало (например $m<10$), то дальнейшее его повышение будет восприниматься глазом как более значительное увеличение количества сведений об объекте, чем повышение числа элементов, и таким образом количественно одинаковое увеличение информации об объекте окажется неравноценным.

В качестве другого примера ограничений, вносимых уже не приемником а источником сообщения, может служить пример передачи распределения интенсивности спектральной линии. Увеличение числа элементов сверх некоторого заданного числа (например $N = 20-30$) может не дать необходимых дополнительных сведений вследствие ограниченности разрешающей силы оптического прибора, от которого спектральная линия проектируется на вход передающего устройства. Увеличение же числа различных градаций яркости приводит в данном случае к увеличению точности измерения интенсивности линии на отмеченной длине волны и, следовательно, представляет ценность.

В том случае, когда отсутствуют ограничения при передаче информации об объекте или процессе и любое сведение имеет одинаковую ценность, справедливы замечания о преимуществе (с точки зрения оптимального использования энергии) увеличения числа элементов по сравнению с увеличением числа различимых градаций.

При передаче цветного изображения передается больше сведений, чем ри передаче черно-белого изображения с тем же количеством элементов. отя цвет, так же как яркость, является характеристикой состояния емента объекта, увеличение количества информации при передаче цвет- ого изображения не соответствует увеличению количества информации ри увеличении градаций яркости в черно-белом телевидении. Для полу- ения цветного изображения от каждого элемента необходимо получить общение о нескольких значениях яркости, соответствующих различному ектральному составу излучения, исходящего от элемента, что соответ- вует увеличению числа элементов, передаваемого за один кадр. Соответ- венно в выражениях (9) и (12) должен быть введен еще множитель ν аще всего для цветного телевидения равный 2—3 [7]).

Из анализа (9) и (12) с включением множителя ν можно заключить, что ведение информации о цвете энергетически выгодно. Оно увеличивает личество сведений об объекте в ν раз и во столько же раз увеличивает ебуемую энергию излучения. При увеличении числа градаций в ν раз, ак мы уже видели, количество сведений увеличилось бы лишь в $\frac{\log_2 \nu m}{\log_2 m}$ раз, гда как требуемая энергия излучения увеличивается в $\frac{\nu}{2}(\nu + 1)$ раз. местe с тем, как уже отмечалось, увеличение числа элементов, при су- ествующем в вещательном телевидении числе элементов порядка $6 \cdot 10^5$, ν раз очень мало добавляло бы новых сведений об объекте, тогда как величение в ν раз количества сведений, образуемое в цветном телеви- нии, представляет значительную ценность при визуальном наблюдении.

ЛИТЕРАТУРА

Г. В. Брауде, Флуктуационные помехи при усилении телевизионного сигнала и чувствительность передающих телевизионных трубок, Тр. секции телевидения, 1948.

А. М. Халфин, Основы телевизионной техники, Изд. Советское радио, 1955.

С. Б. Гуревич, Р. А. Гамбург, Чувствительность телевизионных камер, Техника кино и телевидения, 1959, 6, 1.

С. И. Вавилов, Микроструктура света, Изд. АН СССР, 1950.

G. A. Morton, J. E. Ruedy, The intensifier orthicon, Conference proceedings 2-nd National Convention on Military Electronics, 1958, p. 113—117.

C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Techn. J., 1948, 27.

В. Л. Крейцер, Совместимые смешанные системы цветного телевидения, Техника кино и телевидения, 1959, 1, 52.

Поступила в редакцию
28 V 1960

К ТЕОРИИ ПЛОСКОЭЛЕКТРОДНОГО ТРИОДА С НУЛЕВЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ В ЗАЗОРЕ СЕТКА—АНОД

Е. Н. Петров

Для случая пренебрежимо малого пространственного заряда в зазоре сетка — анод плоскоэлектродного триода указан простой приближенный метод расчета катодного тока.

Показано, что такой метод для случая нулевых начальных скоростей эмиттируемых электронов дает практически ту же точность расчета тока пространственного заряда, что и распространенный метод расчета, когда анод прикатодного эквивалентного диода расположен в плоскости сетки триода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСЧЕТЕ КАТОДНОГО ТОКА В ПЛОСКОЭЛЕКТРОДНОМ ТРИОДЕ

В основе методики расчета катодного тока электронных ламп с сетками лежит идея сводимости многосеточной лампы к эквивалентному диоду.

Катодный ток эквивалентного плоскоэлектродного диода определяется [1] по заданной геометрии его электродов (величине $F_к$ — активной поверхности катода и зазору $X_{экв}$ между катодом и анодом), температуре катода T, эмиссии катода I_S и напряжению на электродах ($U_{экв}$ — потенциал анода). Если принять величины $F_к$, T, I_S общими для лампы с сетками и эквивалентного диода, то задача расчета катодного тока триода сведется к определению величин $X_{экв}$ и $U_{экв}$. В работе В. С. Лукошкова [2], а также в ряде других работ, например [4, 5], триод представлен в виде двух последовательно включенных диодов и показано, что «горячее» прикатодное поле плоскоэлектродного триода с идеальной сеткой совпадает с «горячим» прикатодным полем плоскоэлектродного диода, имеющего зазор $X_д$ между катодом и анодом, равный зазору $X_{кс}$ между катодом и сеткой триода, и потенциал $U_д$ анода:

$$U_д = \frac{U_с + \varkappa_2 D U_а}{1 + \varkappa_2 D + \varkappa_1 D'}, \qquad (1)$$

где $U_с$ — потенциал сетки триода; $U_а$ — потенциал анода триода; D, D' — прямая и обратная проницаемости поля с анода триода на катод и с катода на анод соответственно;

$$\varkappa_1 = \frac{E_{I\,гор}}{E_{I\,хол}};$$

$$\varkappa_2 = \frac{E_{II\,гор}}{E_{II\,хол}};$$

$E_{I\,гор}$, $E_{I\,хол}$ — напряженности соответственно «горячего» и «холодного» полей триода на поверхности сетки со стороны катода; $E_{II\,гор}$, $E_{II\,хол}$ — напряженности соответственно «горячего» и «холодного» полей триода на поверхности сетки со стороны анода.

Величины $U_с$ и $U_а$ обычно заданы, проницаемости D и D' сетки триода можно расчитать по заданной геометрии триода, пользуясь известными формулами. Таким образом, задача катодного тока триода сводится к определению «горячих» параметров $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Л. В. Шубин воспользовался тем обстоятельством, что в большинстве практически важных случаев можно пренебречь пространственным зарядом в зазоре сетка — анод триода ($\varkappa_2 = 1$). Тогда формула (1) упрощается:

$$U_{\text{д}} = \frac{U_{\text{с}} + DU_{\text{а}}}{1 + D + \varkappa_1 D'} . \tag{2}$$

Коэффициент $\varkappa_1$ можно определить с учетом максвелловского распределения начальных скоростей электронов по таблицам [3]. При этом оказывается, что значение величины $U_{\text{д}}$ находится по формуле (2) при помощи метода последовательных приближений.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ДИОДА

Исходя из общей формулы (1) и используя условие $\varkappa_2 = 1$, можно построить эквивалентный диод так, чтобы задача расчета катодного тока триода упростилась.

Сопоставим с нашим триодом некоторый эквивалентный диод, анод которого расположен в произвольной плоскости, параллельной плоскости сетки триода. Зная величину $E_{1\,\text{гор}}$, определим потенциал $U_{\text{экв}}$ анода эквивалентного диода из соотношения

$$U_{\text{экв}} = U_{\text{д}} + E_{1\,\text{гор}} X_{\text{сх}}, \tag{3}$$

где $U_{\text{д}}$ — действующий потенциал (2) сетки триода; $X_{\text{сх}}$ — расстояние от сетки до анода эквивалентного диода. Таким образом, при $X_{\text{сх}} > 0$ распределение потенциала у сетки со стороны катода экстраполируется в пространство сетка — анод. Очевидно,

$$U_{\text{экв}} = U_{\text{д}}\left(1 + \frac{X_{\text{сх}}}{X_{\text{кс}}}\varkappa_1\right) . \tag{4}$$

Экстраполяцию потенциала — выбор $X_{\text{сх}}$ — произведем так, чтобы $U_{\text{экв}}$ не было функцией горячего параметра $\varkappa_1$. В общем случае величина $X_{\text{сх}}$ оказывается тогда функцией $\varkappa_1$. Однако можно указать такое значение $U_{\text{экв}}$, при котором $X_{\text{сх}}$ не является функцией $\varkappa_1$.

Именно, пусть

$$U_{\text{экв}} = \frac{U_{\text{с}} + DU_{\text{а}}}{1 + D} .$$

Тогда соотношение (4) даст

$$X_{\text{сх}} = X_{\text{кс}} \frac{D'}{1 + D} . \tag{5}$$

Таким образом, диод, эквивалентный заданному триоду, имеет величину зазора между катодом и анодом

$$X_{\text{экв}} = X_{\text{кс}} \frac{1 + D + D'}{1 + D} \tag{6}$$

и величину потенциала анода

$$U_{\text{экв}} = \frac{U_{\text{с}} + DU_{\text{а}}}{1 + D} . \tag{7}$$

Между прочим, линейная экстраполяция распределения потенциала холодного поля пространства катод — сетка до плоскости $X_{\text{экв}}$ приводит к тому же значению $U_{\text{экв}}$ (7), т. е. уравнение

$$U_{\text{д хол}} + \frac{U_{\text{д хол}}}{X_{\text{кс}}} X_{\text{сх}} = U_{\text{д гор}} + E_{1\,\text{гор}} X_{\text{сх}}$$

или

$$U_{\text{д хол}}\left(1 + \frac{X_{\text{сх}}}{X_{\text{кс}}}\right) = U_{\text{д гор}}\left(1 + \frac{X_{\text{сх}}}{X_{\text{кс}}}\varkappa_1\right)$$

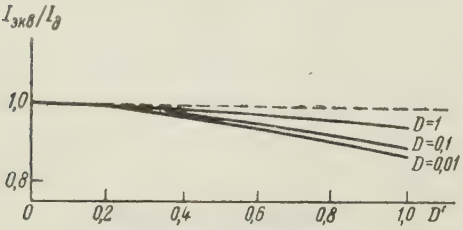
является неопределенным относительно $\varkappa_1$ при

$$X_{сх} = X_{кс}\frac{D'}{1+D}.$$

Таким образом, для важного частного случая, когда допустимо пренебречь пространственным зарядом в зазоре сетка - анод триода, можно определить ток пространственного заряда (а следовательно, и параметры) триода простым путем, минуя промежуточное определение табличного коэффициента $\varkappa_1$.

3. ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ТОКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ТРИОДЕ

Простая оценка относительной погрешности различных методов расчета катодного тока триода может быть дана для случая нулевых начальных скоростей электронов. В этом случае $\varkappa_1 = 4/3$ и соответственно



Относительные значения тока пространственного заряда в триоде, вычисленные двумя различными методами

$$U_д = \frac{U_c + DU_a}{1 + D + \frac{4}{3}D'}, \qquad (8)$$

$$I_д = 2{,}33\cdot 10^{-6}\frac{U_д^{3/2}}{X_{кс}^2}F_к. \qquad (9)$$

Соотношение (9) — известный закон Чайльда.

Применим этот закон к эквивалентному диоду:

$$I_{экв} = 2{,}33\cdot 10^{-6}\frac{U_{экв}^{3/2}}{X_{экв}^2}F_к. \qquad (10)$$

Корректность одного метода сводимости относительно другого можно оценить при помощи соотношения

$$\frac{I_{экв}}{I_д} = \frac{U_{экв}^{3/2}X_{кс}^2}{U_д^{3/2}X_{экв}^2}$$

или, используя формулы (2), (6), (7),

$$\frac{I_{экв}}{I_д} = \frac{\left(1+\frac{4}{3}\frac{D'}{1+D}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{D'}{1+D}\right)^2}.$$

Из рисунка следует, что для подавляющего большинства современных триодов ($D>0{,}01$; $D^1<0{,}5$) расхождение результатов расчета токов обоими методами не превышает нескольких процентов.

В случае максвелловского распределения начальных скоростей электронов $\varkappa_1 \neq 4/3$, и формула (2) существенно усложняется, что затрудняет оценку относительной погрешности методов расчета в общем виде.

На практике различие в величинах токов $I_д$ и $I_{экв}$ обычно не обнаруживается.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Ferris, Some characteristics of diodes with oxidecoated cathodes, RCA Rev., 1949, 10, 1, 134.
2. В. С. Лукошков, Теоретические основания расчета характеристики и параметров электронных ламп с сетками, Канд. диссертация, ЛЭТИ, 1941.
3. Л. В. Шубин, Методы расчета характеристик и параметров радиоламп, Канд. диссертация, 1954.
4. Ф. Б. Левеллин, Инерция электронов, перев. с англ. издания 1941 г., ГТТИ, 1946.
5. B. D. H. Tellegen, Physica, 1925, 5, 301.

Поступила в редакцию
8 III 1960

1961 № 7

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ УМНОЖИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНУЮ ЕМКОСТЬ $p-n$-ПЕРЕХОДА

В. Б. Брагинский, В. А. Дианова, Е. Р. Мустель

Изложены результаты исследования умножителя частоты диапазона СВЧ на нелинейной емкости p — n-перехода с большим коэффициентом умножения. Изучались зависимости выходной мощности от номера гармоники, постоянной времени p — n-перехода диода, входной мощности и постоянного смещения на диоде. Исследована амплитудная и фазовая стабильности умножителя.

В качестве нелинейного элемента умножителя частоты могут быть использованы как нелинейные активные элементы, так и нелинейные реактивные элементы, нашедшие в последнее время широкое применение в диапазоне СВЧ.

Если нелинейный реактивный элемент и связанные с ним нелинейные цепи не обладают потерями, задающий генератор согласован только на частоте f, а нагрузка — на частоте nf, то принципиально возможно 100-процентное преобразование мощности P_f на частоте f в мощность P_{nf} на частоте nf [1]. В то же время потери преобразования P_{nf}/P_f частотного умножителя на нелинейном положительном сопротивлении в наилучшем случае не могут быть меньше $1/n^2$ [2, 3].

Ряд появившихся в последние годы работ [4, 5, 6] посвящен исследованию частотных умножителей с нелинейной емкостью p — n-перехода в качестве нелинейного реактивного элемента.

Расчет умножителя с учетом реальной характеристики диода при наличии большого сигнала представляет значительные трудности и может быть проведен лишь численным методом для конкретных случаев.

Сравнение эффективности преобразования частоты на нелинейном сопротивлении (NR-диод) и на нелинейной емкости (NC-диод) для широкополосной схемы и идеальной характеристики диодов, проведенное в работе [5], показало, что с ростом номера гармоники потери преобразования умножителя с NC-диодом увеличиваются значительно меньше, чем с NR- диодом.

Резонансная двухконтурная система рассмотрена в работе [6] для случая малого сигнала. Расчет в этом приближении показывает, что при небольших n умножители, использующие нелинейную емкость, более эффективны, чем умножители на нелинейном сопротивлении. При больших номерах n эффективность умножителей первого типа оказывается меньше эффективности умножителей второго типа.

На рис. 1 наряду с теоретическими предельными значениями коэффициента преобразования мощности, которые могут быть получены с NR-диодом и NC-диодом в резонансной системе, приведены расчетные данные из работы [6]. Значение номера n, при котором эффективности умножителей сравниваются (точка A на рис. 1), зависит от добротности нелинейного элемента и от степени нелинейности характеристики.

В нашей работе описаны экспериментальные результаты исследования умножителя частоты с большим коэффициентом умножения (до $n = 50$). Принципиальная схема умножителя дана на рис. 2. Умножитель представляет собой сочетание коаксиальной линии 70 *ом* и стандартного коак-

сиально-волноводного перехода. В разрыве перехода расположен диод *1*, емкость $p-n$-перехода которого использована как нелинейный элемент.

На вход умножителя через постоянный аттенюатор (10—12 *дб*) подается переменное напряжение от генератора, частота которого может изменяться в пределах от 184 до 600 *Мгц*. Максимальная мощность, отдаваемая генератором на согласованную нагрузку, не превышает 3,5 *вт*.

Коаксиальный поршень *2* вместе со средней емкостью нелинейного элемента образует контур, настраиваемый на частоту входного сигнала. Поршень *2* изолирован по постоянной составляющей от внешней трубы коаксиала, что необходимо для подачи постоянного смещения на диод.

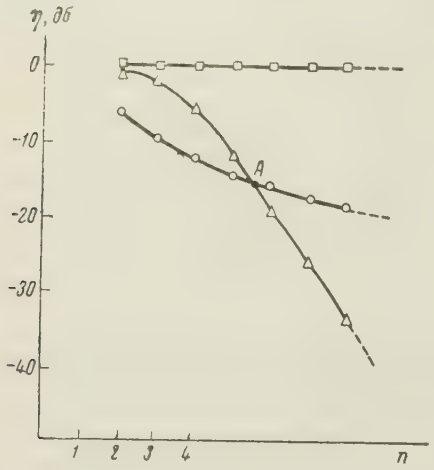


Рис. 1. Потери преобразования для:

а — идеального *NR*-диода (кружки); *б* — идеального *NC*-диода (квадраты); *в* — нелинейной реактивности из работы [6] (треугольники)

Выходной контур создается другим коаксиальным поршнем *3* и двумя четвертьволновыми стаканами *4*, не пропускающими умноженный сигнал во входную цепь. Выходной контур через диафрагму связан с объемным проходным прямоугольным резонатором, назначение которого отфильтровать гармонику с определенным номером n.

Добротность резонатора ~ 200, что дает ослабление соседних гармоник по сравнению с выделенной гармоникой не менее чем на 20 *дб*. Без фильтрующего элемента соседние гармоники меньше выбранной в 5 раз.

С выхода резонатора сигнал можно подать на спектроанализатор, специально проградуированный по мощности, или на стандартный измеритель мощности.

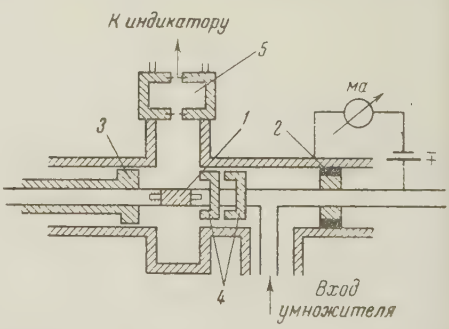


Рис. 2. Принципиальная схема конструкции умножителя:

1 — нелинейная емкость; *2*, *3* — коаксиальные поршни; *4* — четвертьволновые стаканы; *5* — резонатор-фильтр

На рис. 3 показана зависимость выходной мощности умножителя от номера гармоники при изменении частоты входного сигнала (от 184 до 600 *Мгц*), неизменной частоте выходного сигнала (~ 9000 *Мгц*) и неизменной входной мощности на входе умножителя. Необходимо отметить, что мощность, поступавшая на диод, менялась при изменении номера гармоники. Однако это обстоятельство не должно существенно изменить зависимость, поскольку измерения проводились при входной мощности, достаточной для насыщения (о насыщении см. ниже).

По оси ординат на рис. 3 отложено отношение в децибелах выходной мощности на n-й гармонике к выходной мощности на 49-й гармонике. Как видно из кривой, имеет место медленное спадание выходной мощности с номером гармоники (примерно 0,3 *дб* на гармонику).

На рис. 4 представлена зависимость выходной мощности P_{nf} от мощности P_f, подаваемой на умножитель ($n = 36$). Как видно из графика, при

$P_f = 100—150$ *мвт* наступает насыщение $P_{вых}$, аналогичное наблюдавшемуся работе [4] при более низких коэффициентах умножения. Насыщение вязано с появлением активного сопротивления, шунтирующего емкость, оторое возникает в том случае, когда амплитуда входного напряже-ия больше постоянного смещения, или когда удвоенная амплитуда

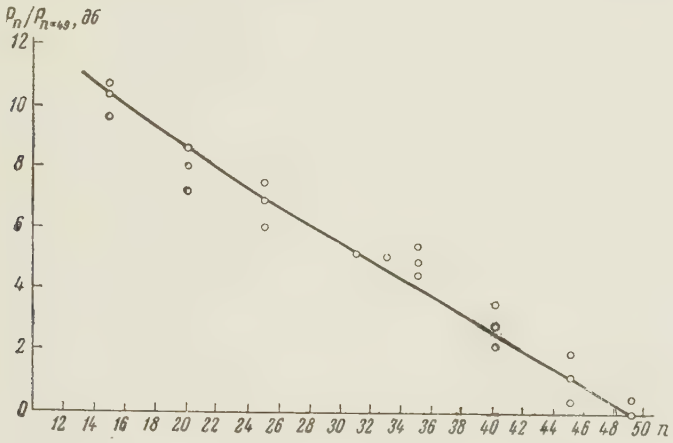


Рис. 3. Зависимость выходной мощности умножителя от номера гармоники

ходного напряжения больше напряжения обратного пробоя. Вы одная мощность имеет ярко выраженный оптимум при изменении по-стоянного смещения, запирающего $p—n$-переход диода (рис. 5). При увеличении входной мощности оптимум смещается в область больших отрицательных смещений.

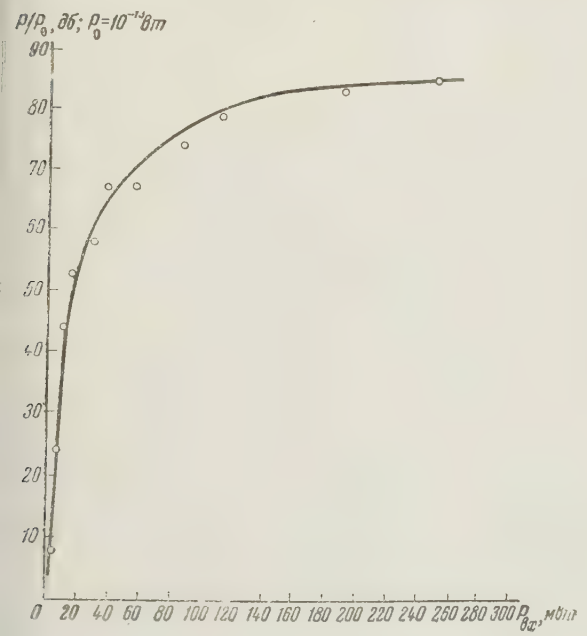


Рис. 4. Зависимость выходной мощности от мощности, подаваемой на вход умножителя

Для исследования фазовой стабильности была собрана установка, состоящая из двух идентичных умножителей, двух однонаправленных вентилей и измерительной линии. На вход умножителей сигнал поступал от общего генератора, и таким образом исключалась его нестабильность.

При помощи проходной детекторной головки одновременно произво-лась проверка амплитудной стабильности одного из умножителей. зонда измерительной линии суммарный сигнал от двух умножителей по авался на детектор. За 9 *час* непрерывной работы (после полуторачасово-

го прогрева установки) амплитуда изменилась на 19 %. Изменение сдвига фаз между умножителями за тот же промежуток времени не превысило 60°.

Для исследования возможности модуляции выходного сигнала на диод подавалось вместе с постоянным смещением дополнительное переменное напряжение частоты 10 *Мгц*. На спектроанализаторе наблюдалось расщепление линии излучения на несколько составляющих, отстоящих друг от друга на 10 *Мгц*.

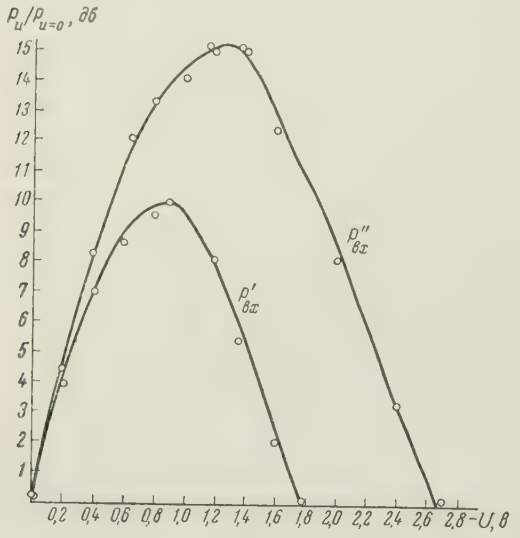


Рис. 5. Зависимость выходной мощности от постоянного смещения на диод, $P'_{вх} < P''_{вх}$

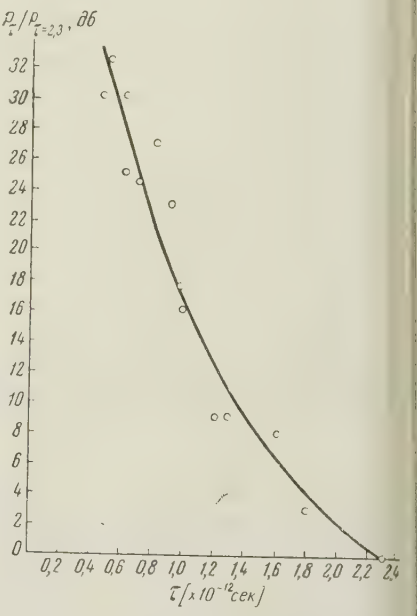


Рис. 6. Зависимость выходной мощности от постоянной времени $p-n$-перехода

При достаточной глубине модуляции и соответствующем постоянном смещении возможно перераспределение энергии между центральной линией и боковыми составляющими. Используя фильтрующий резонатор достаточной добротности, можно выделить одну из составляющих спектра.

На рис. 6 представлена зависимость выходной мощности ($n = 36$) от постоянной времени $p-n$-перехода диода при примерно одинаковом напряжении обратного пробоя (одинаковая мощность насыщения). Как видно из рис. 6, имеет место резко выраженная зависимость коэффициента преобразования по мощности от $\tau = R_s C$.

Наибольшая наблюдавшаяся выходная мощность составляла 2,5 *мвт* ($n = 36$, $\tau = (R_s C)_{U=-10в} = 0{,}36 \cdot 10^{-12}$ *сек*) при входной мощности порядка 250 *мвт*.

Необходимо отметить, что входная мощность измерялась при замене умножителя измерителем мощности с согласованным входом. Наибольшую мощность умножитель отдавал при ксв порядка 3,0. Это связано с недостатком конструкции умножителя, которая не позволяет изменять расстояние между местом подключения входного кабеля и диодом.

Таким образом, при настройке входного контура в резонанс с частотой задающего генератора нет согласования с последним, и потребляемая мощность не превышает 250 *мвт*. Это означает, что потери преобразования составляют не более 20 *дб*, что на 11 *дб* лучше минимальных потерь преобразования, которые возникают при использовании активного нелинейного элемента с идеальной фильтрующей системой на том же номере гармоники. Полученный коэффициент преобразования по мощности и величина выходной мощности несколько выше величин, полученных в двухкас-

дном умножителе ($f_{вх} = 218$ *Мгц*, $f_{вых} = 8720$ *Мгц*, коэффициент преобразования 27 *дб*, выходная мощность 2 *мвт*, $n = 8 \cdot 5 = 40$) [7].

Умножители подобного типа могут с успехом применяться в измерительной технике, а также в качестве высокостабильных гетеродинов.

Для получения мощности порядка 1 *мвт* необходимо использование умножителях диодов постоянной времени $p - n$-перехода не хуже 10^{-12} *сек*.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность за помощь в работе В. А. Красилову и В. М. Вальд-Перлову.

ЛИТЕРАТУРА

J. M. Manley, H. E. Rowe, Some general prorerties of nonlinear elements, Proc. I. R. E., 1956, **44**, 7, 904.

C. H. Page, Harmonic generation with ideal rectifiers, Proc. I. R. E., 1958, **46**, 10, 1738.

C. H. Page, Frequency conversion with positive nonlinear resistors, J. Res. Nat. Bur. Standards, 1956, **56**, 179.

Kern K. N. Chang, Harmonic generation with nonlinear reactances, RCA Rev., 1958, **20**, 3, 455.

D. Leenov, A. Uhlir, Jr, Generation of harmonics and subharmonics at microwave frequencies with p—n junction diodes, Proc. I. R. E., 1959, 10, 1724.

D. B. Leeson, S. Weinreb, Frequency multiplication with nonlinear capacitors-A circuit analysis, Proc. I. R. E., 1959, 12, 2076.

R. Lowell, M. Kiss, Solid-state microwave power sources using harmonic generation, Proc. I. R. E., 1960, 7, 1834.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
Кафедра теории колебаний

Поступила в редакцию
17 XI 1960

1961 № 7

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ НУТАЦИОННОГО ТИПА В ФЕРРИТАХ*

Л. К. Михайловский, В. П. Макарищев, Б. П. Поллак, В. А. Фабриков

Экспериментально наблюдалось возникновение собственных синусоидальных колебаний намагниченности в намагниченном ферритовом образце, помещенном в резонансный контур промежуточной частоты (30 *Мгц*) и подверженном воздействию СВЧ-поля поперечной поляризации, когда мощность этого поля превышала критическое значение $P_{кр}$ (порядка 1—3 *вт*). Обнаружено существование нелинейной области на кривых зависимости мощности сигнала промежуточной частоты от мощности гетеродина $P_г$ в схеме смешения при значениях $P_г$, близких к $P_{кр}$. Экспериментальные результаты находятся в соответствии с полученными ранее выводами из теории нелинейных гиромагнитных эффектов, связанных с нутационными колебаниями намагниченности в ферритах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ряде работ [1, 2, 3, 4] исследован теоретически и экспериментально эффект смешения в намагниченном ферритовом образце двух СВЧ-сигналов малой мощности. Установлено, что мощность возникающих в процессе смешения колебаний намагниченности разностной частоты пропорциональна мощности каждого из взаимодействующих СВЧ-сигналов.

Если через $P_п$, $P_с$ и $P_г$ обозначить соответственно мощность колебаний промежуточной (разностной) частоты, мощность сигнала и мощность гетеродина, то при малых значениях $P_с$ и $P_г$ между этими величинами существует соотношение

$$P_п = AP_сP_г, \tag{1}$$

где коэффициент пропорциональности A для исследованных схем с поликристаллическими ферритовыми образцами составляет величину порядка 10^{-3}—10^{-4} $1/вт$, что соответствует при гетеродине на клистроне коэффициенту преобразования порядка —50 *дб*.

Соотношение (1) выведено впервые в работе [1] в приближении, не учитывающем обратное воздействие контура промежуточной частоты на образец. Позже было показано в [5], что в условиях, когда мощность гетеродина $P_г$ приближается к некоторому критическому значению $P_{кр}$, пренебрегать полем реакции в расчетах нельзя. Наличие обратной связи может привести к возникновению в системе контур — образец самопроизвольных колебаний, если $P_г \geqslant P_{кр}$. Минимальное возможное значение $P_{кр}$ обратно пропорционально кубу ширины линии ферромагнитного резонанса ΔH и для монокристаллических образцов иттриевого феррита в соответствии с расчетом может быть достаточно малым (сотни, десятки и даже единицы милливатт).

Если мощность гетеродина не превышает $P_{кр}$, но близка к нему, т. е.

$$P_г \gg (P_{кр} - P_г) > 0,$$

---

* Работа доложена на сессии Всесоюзного научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова 18 V 1960 г.

о схема может работать как регенерированный усилитель электромагитных колебаний, возбуждаемых в контуре внешним источником. Этим сточником, в частности, может служить воздействующий на образец игнал СВЧ, частота которого сдвинута по отношению к частоте гетероина на соответствующую величину [6].

Усиление обусловлено тем, что в результате взаимодействия сигналов азличных частот (промежуточной и СВЧ), происходящего на ферритовом бразце через прецессирующие магнитные моменты, в контур промежуточой частоты вносится отрицательное сопротивление [7]. Зависимость

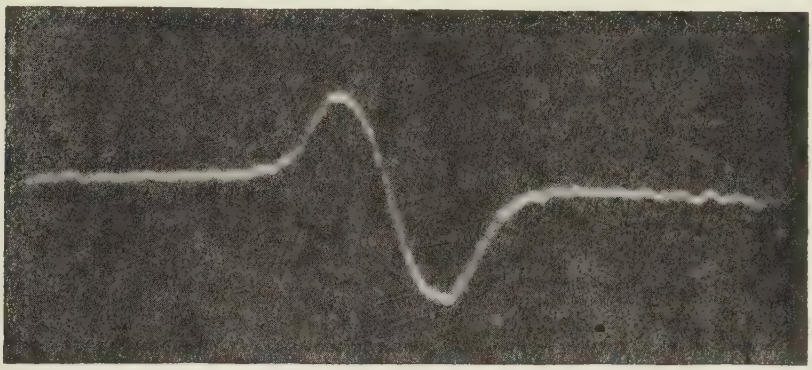


Рис. 1. Осциллограмма сигнала изменения $\chi''_{\text{п}}$ ферритового образца при воздействии СВЧ-поля и синусоидальной модуляции намагничивающего поля H_0 вокруг резонансного значения $H_{\text{рез}}$; $\chi''_{\text{п}}$ проходит от положительных значений (левая часть рисунка) через нуль при $H_0 = H_{\text{рез}}$ к отрицательным значениям с уменьшением поля H_0. Взято из работы [7]

нимой части комплексной восприимчивости $\chi_{\text{п}} = \chi'_{\text{п}} - i\chi''_{\text{п}}$, описывающей потери на промежуточной частоте $f_{\text{п}}$, от величины постоянного намагничивающего поля H_0 иллюстрируется осциллограммой рис. 1, взятой з работы [7]. При H_0, превышающем величину поля ферромагнитного езонанса $H_{\text{рез}}$, $\chi''_{\text{п}}$ положительна, что соответствует поглощению средой ощности сигнала промежуточной частоты. Однако, когда H_0 становится еньше $H_{\text{рез}}$, $\chi''_{\text{п}}$ принимает отрицательный знак, что соответствует усилению средой мощности сигнала промежуточной частоты. Осциллограмма нималась на монокристаллическом образце иттриевого феррита при астоте $f_{\text{п}} = 8$ *Мгц* и мощности сигнала СВЧ 5 *мвт* с помощью обычной втодинной схемы (ИМИ-2), используемой при наблюдениях ядерного езонанса.

С приближением мощности гетеродина к критическому значению коэффициент преобразования мощности слабого сигнала $P_{\text{п}}/P_{\text{с}}$ в схеме смещения должен неограниченно возрастать. Соотношение (1) при этом следует обобщить, записывая в виде

$$P_{\text{п}} = A\,\frac{P_{\text{с}}P_{\text{г}}}{\left(1-\dfrac{P_{\text{г}}}{P_{\text{кр}}}\right)^2}\,. \qquad (2)$$

но справедливо только для значений $P_{\text{г}} < P_{\text{кр}}$. При $P_{\text{г}} = P_{\text{кр}}$ правая асть соотношения (2) обращается в бесконечность, что соответствует озникновению в системе собственных синусоидальных колебаний, устаовившаяся амплитуда которых может быть рассчитана в линейном приближении относительно величины $(P_{\text{г}} - P_{\text{кр}})/P_{\text{кр}} > 0$.

Повышение коэффициента преобразования ферритового смесителя СВЧ меет большое практическое значение. Предполагаемый низкий уровень

собственных шумов ферритовых устройств делает перспективным их использование в схемах смешения и предварительного усиления по промежуточной частоте. Однако эффективное использование ферритовых смесителей на СВЧ возможно лишь в том случае, когда их коэффициент преобразования будет не хуже, чем у кристаллических смесителей (—(6—8) *дб*).

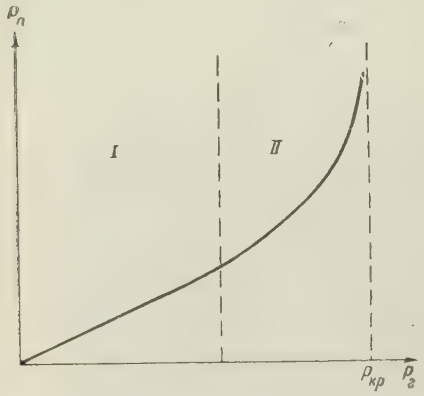


Рис. 2. Теоретическая зависимость мощности промежуточной частоты $P_п$ от мощности гетеродина $P_г$ при постоянной мощности сигнала $P_с$:

I — участок линейного смешения, соответствующего формуле (1); *II* — участок смешения с последующим усилением промежуточной частоты тем же ферритовым образцом (формула (2))

Нелинейные гиромагнитные свойства ферритов, обеспечивающие усиление электромагнитных колебаний промежуточной частоты и обусловливающие возможность повышения коэффициента преобразования ферритовых смесителей, связаны с возникновением в образце собственных нутационных колебаний намагниченности *. Экспериментальному исследованию этих явлений, теоретически предсказанных в работах [5, 6], посвящена настоящая статья. Целью исследования было обнаружение нелинейного участка зависимости $P_п$ от $P_г$ в схеме смешения двух сигналов СВЧ (рис. 2) и возникновения в ферритовом образце, помещенном в резонансный контур промежуточной частоты, собственных синусоидальных колебаний намагниченности под воздействием СВЧ-мощности гетеродина.

Эксперименты проводились в диапазоне волн 3 *см*, промежуточная частота равнялась 30 *Мгц*.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Исследования проводились на установке, упрощенная блок-схема которой представлена на рис. 3. Источниками СВЧ-сигналов служили генератор на клистроне (43-И), работающий в импульсном или непрерывном режимах, и генератор на магнетроне, работающий в импульсном режиме. Ферритовый образец с катушкой на нем располагался в стандартной волноводной секции на расстоянии 6 *мм* от узкой стенки волновода. Добротность резонансного контура, образуемого катушкой вместе с параллельно присоединенным конденсатором, на частоте 30 *Мгц* равнялась 20. Расположение витков катушки на образце подбиралось по максимуму сигнала промежуточной частоты. Постоянное магнитное поле прикладывалось параллельно узкой стенке волновода и по величине соответствовало полю ферромагнитного резонанса. Образцами служили монокристаллы иттриевого феррита с шириной полосы ферромагнитного резонанса 5—10 *эрс*. Форма образцов была близка к сферической, поверхность не полировалась. Сигнал от смесителя подавался через предварительный усилитель

* Нутационными колебаниями намагниченности называют периодическое изменение угла однородной прецессии магнитных моментов материала вокруг постоянного намагничивающего поля $\vec{H}_0$, происходящей, например, под воздействием поперечного магнитного поля $\vec{h}$ СВЧ.

ромежуточной частоты и усилитель промежуточной частоты на осцил-
граф. Полный коэффициент усиления сигнала промежуточной частоты
имерно равнялся 10^5. Уровень собственных шумов усилительного трак-
, приведенный ко входу предварительного усилителя, составлял около
мкв (измерялся при помощи СГ-1). Питание обоих усилителей промежу-
чный частоты и электромагнита было стабилизированным.

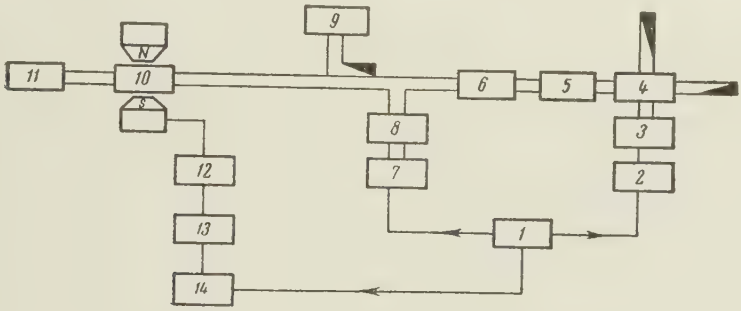


Рис. 3. Блок-схема установки:

1 — задающий импульсный генератор (синхронизатор); *2* — модулятор генератора на магнетроне; *3* — генератор на магнетроне; *4* — двойной T-мост; *5* — резонатор (50-И) (при работе импульсами $\tau = 6$ *мксек* отключается); *6* — регулируемый аттенюатор; *7* — генератор на клистроне (43-И); *8* — ферритовый вентиль; *9* — измеритель мощности СВЧ; *10* — ферритовый смеситель; *11* — поршень-короткозамыкатель или согласованная нагрузка; *12* — предварительный усилитель частоты 30 *Мгц*; *13* — усилитель частоты 30 *Мгц*, детектор и видеоусилитель; *14* — осциллограф

Основными мешающими явлениями, которые пришлось устранять при
спериментах, были следующие.

1. Ударное возбуждение контура с ферритом за счет быстрого измене-
ия постоянной составляющей намагниченности феррита в направлении
остоянного поля, происходящего под воздействием переднего и заднего
фронтов импульсов сигнала гетеродина [8].

2. Перегрев ферритового образца из-за теплового рассеяния мощности
ВЧ-поля, поглощаемой образцом.

3. Непосредственная наводка импульсов модулятора гетеродина на
пи тракта усилителей промежуточной частоты.

Перегрев ферритового образца устранялся при работе гетеродина
ратковременными импульсами (1—6 *мксек*). Влияние ударного возбуж-
ения и наводки ослаблялось тем, что на образец подавался не непосредст-
нно импульс от генератора на магнетроне, а импульс резонатора 50-И
добротностью 100 000), возбуждаемого этим генератором.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В ходе исследований снималась зависимость амплитуды сигнала про-
жуточной частоты от мощности гетеродина при постоянной мощности
ВЧ-сигнала и зависимость амплитуды собственных колебаний, возникаю-
их в системе при $P_г > P_{кр}$, от мощности гетеродина *. Характеристики сни-
лись на линейном участке усиления обоих усилителей. Величина посто-
ного намагничивающего поля подбиралась так, чтобы получить макси-
альный сигнал на экране осциллографа.

На рис. 4 представлена зависимость мощности промежуточной частоты
от мощности гетеродина $P_г$ при постоянном уровне мощности СВЧ-си-
гнала P_c. На образец одновременно подавался сигнал от генератора на
агнетроне через эхо-резонатор и сигнал от генератора на клистроне

* Измерения были выполнены В. И. Макарищевым и Р. Д. Савостьяновой.

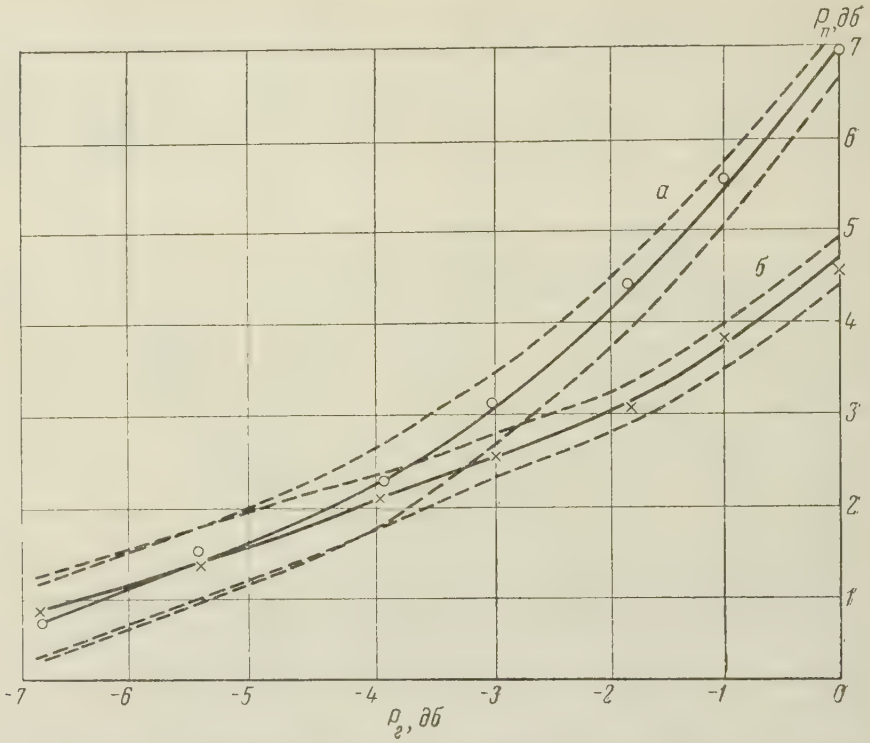


Рис. 4. Экспериментальная зависимость мощности промежуточной частоты $P_п$ (30 *Мгц*) от мощности гетеродина $P_г$ при постоянной мощности сигнала $P_с$:

а — $f_с = 9400$ *Мгц*; $f_г = 9370$ *Мгц*; *б* — $f_с = 9340$ *Мгц*; $f_г = 9370$ *Мгц*

длительностью 1 *мксек* *. Задержка импульсов генератора на клистроне во времени относительно импульсов генератора на магнетроне подбиралась так, чтобы их положение на экране осциллографа соответствовало середине спада эхо-сигнала от резонатора. На экспериментальных кривых четко видна нелинейная область, которую, видимо, следует приписать наложению эффекта усиления сигнала промежуточной частоты на обычный эффект смешения двух СВЧ-сигналов. В этой области эффект смешения нельзя описывать упрощенной формулой (1), а следует пользовать-

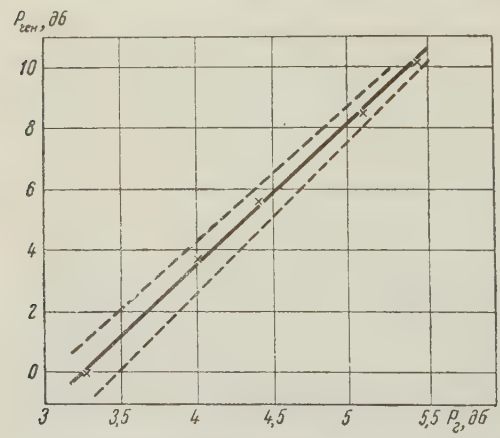


Рис. 5. Экспериментальная зависимость мощности собственных колебаний намагниченности ферритового образца на частоте 30 *Мгц* от мощности гетеродина $P_г$ в отсутствие сигнала. Пунктирные кривые показывают точность измерений

ся обобщенной формулой (2). Кривые, снятые для случаев, когда $f_с = f_г - \Omega$ и $f_с = f_г + \Omega$ ($f_с$ и $f_г$ — частоты сигнала и гетеродина), не совпадают, причем в первом случае кривая идет ниже. Подробнее этот эффект не исследовался.

* При работе магнетрона импульсами длительностью 6 *мксек* эхо-резонатор не использовался. Экспериментальные данные, полученные в этом случае, подтверждают результаты, описанные ниже.

При мощностях гетеродина в импульсе, превышающих некоторое ритическое значение, близкое к 1—3 *вт*, наблюдалось самопроизвольное озникновение колебаний промежуточной частоты в системе контур — об-азец. Зависимость мощности этих колебаний от мощности гетеродина, нятая при выключенном сигнале от генератора на клистроне, показана а рис. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально наблюдалось возникновение собственных нутацион-ых колебаний намагниченности в намагниченном ферритовом образце, омещенном в резонансный контур промежуточной частоты (30 *Мгц*), ри воздействии СВЧ-поля поперечной поляризации, когда мощность того поля превышала некоторое критическое значение порядка 1—3 *вт*. Обнаруженные колебания, по-видимому, носят синусоидальный характер не могут быть отождествлены с релаксационными колебаниями, наблю-авшимися Вейссом на ферритовом образце, помещенном в объемный резо-атор большой добротности [9].

Обнаружено также существование нелинейной области на кривых за-исимости мощности сигнала промежуточной частоты от мощности гете-одина $P_г$ в схеме смешения при значениях $P_г$, близких к $P_{кр}$. Эти экспери-ентальные результаты находятся в соответствии с полученными ранее ыводами [5, 6] из теории нелинейных гиромагнитных эффектов, связан-ых с нутационными колебаниями намагниченности в ферритах. Окон-ательная идентификация экспериментально наблюдавшихся эффектов танет возможной после их тщательного количественного исследования. Іолученные результаты могут представить практический интерес в связи проблемой повышения эффективности работы ферритовых смесителей олебаний СВЧ.

Работа проводилась в Московском энергетическом институте на кафедре еоретических основ радиотехники. Результаты работы обсуждены на еминаре К. М. Поливанова, которому авторы пользуются случаем вы-разить искреннюю благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

. В. А. Фабриков, Е. Г. Риттер, Нелинейные гиромагнитные свойства ферритов на низких уровнях СВЧ-мощности, Тр. НИИ МАП, 1957, 4,45; Изв. АН СССР, Сер. физ., 1959, 23, 3, 380.
. L. Lewin, The efficiency of a ferrite as a microwave mixer, Proc I. E. E., 1959, **106**, part C, 10, 153.
. А. Л. Микаэлян, В. Я. Антоньянц, Смешение сверхвысоких частот при помощи ферритов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 90
. Л. К. Михайловский, Б. П. Поллак, В. Ф. Балаков, Преобразование электромагнитных колебаний СВЧ на ферритах, Тр. 3-й Всесоюзной конференции по ферритам, Минск, 1959.
. В. А. Фабриков, Об условиях возникновения собственных колебаний намагниченности гиромагнитной среды, Радиотехника и электроника, 1960, 5 1, 117.
. В. А. Фабриков, Об эффективности работы ферритовых элементов в качестве смесителей СВЧ в схемах детектирования, Тр. 3-й Всесоюзной конференции по ферритам, Минск, 1959.
. В. А. Фабриков, В. И. Козлов, В. Т. Кадеев, В. Д. Кудрявцев, Экспериментальное исследование на монокристаллах иттриевого феррита эффектов, связанных с нутационными колебаниями намагниченности материала в условиях ферромагнитного резонанса, Тезисы докладов на совещании по ферромагнетизму и антиферромагнетизму, Ленинград, май, 1961, Изд. АН СССР, 1961.
. N. Bloembergen, S. Wang, Relaxation effects in para- and ferromagnetic resonance, Phys. Rev., 1954, 93, 1, 72.
. M. T. Weiss, Microwave and low-frequency oscillation due to resonance instabilities in ferrites, Phys. Rev. Letters, 1958, 1, 7, 239.

Поступила в редакцию
4 VII 1960

1961 № 7

ЯВЛЕНИЯ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ РЕЗОНАТОРА С ФЕРРИТОМ

А. Л. Микаэлян, В. Я. Антоньянц, Ю. Г. Турков

Исследованы явления в резонаторе с малым ферритовым образцом. Показано, что резонатор и помещенный в него намагниченный феррит образуют связанную систему, аналогичную двум связанным контурам. Отмечены случаи, где необходим учет указанных явлений, и кратко рассмотрены некоторые их практические применения.

ВВЕДЕНИЕ

В технике СВЧ весьма часто используются системы, представляющие собой резонатор с намагниченным ферритовым образцом. Такие системы применяют в ферритовых усилителях, для магнитной перестройки частоты резонаторов, измерения параметров феррита и для других целей.

При расчете указанных систем обычно предполагается, что действие феррита сводится лишь к изменению собственной частоты и добротности незаполненного резонатора. Такое предположение оказывается правильным, но только в том случае, когда частота ферромагнитного резонанса значительно отличается от собственной частоты незаполненного резонатора, а также если феррит обладает значительными магнитными потерями. Если же указанные условия не выполняются, то в рассматриваемой системе имеют место интересные явления, представляющие большой практический интерес. Оказывается, что в этом случае резонатор, содержащий феррит, ведет себя как система связанных контуров. Одним из этих контуров является феррит, в котором возбуждается какой-либо тип магнитных колебаний, другим — резонатор, также возбуждаемый на одном из своих собственных типов колебаний. Наиболее интересные явления происходят в области, где частоты собственных колебаний намагниченного феррита и незаполненного резонатора близки между собой. Аналогичный эффект взаимной связи наблюдается и в акустических резонансных системах (см., например, [1]).

В настоящей работе изложены результаты теоретического и экспериментального исследований явлений в резонаторе с намагниченным ферритовым образцом. Показано, что эти явления необходимо учитывать при измерении параметров феррита. Кратко рассмотрены некоторые их практические применения.

1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Расчет взаимной связи резонатора с ферритом можно провести методом квазистатических приближений, причем следует учесть зависимость составляющих тензора магнитной проницаемости феррита от частоты.

Мы будем исходить из выражения для собственной частоты резонатора с ферритом, записанного следующим образом:

$$\frac{\omega-\omega_{\text{р}}}{\omega_{\text{р}}}=-\frac{\int\limits_{V_{\Phi}}\mu_0\vec{M}\vec{H}_{\text{р}}^{*}dv+\int\limits_{V_{\Phi}}(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}\vec{E}_{\text{р}}^{*}dv}{\int\limits_{V_{\text{р}}}(\mu_0\vec{H}\vec{H}_{\text{р}}^{*}+\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}_{\text{р}}^{*})\,dv}, \qquad (1)$$

где $\omega_{\text{р}}$ — собственная частота полого резонатора; $\vec{H}_{\text{р}}$, $\vec{E}_{\text{р}}$ — магнитное и электрическое поля в полом резонаторе; $\vec{H}$, $\vec{E}$ — соответствующие поля

в резонаторе, возмущенном ферритовым образцом; $\vec{M}$ — намагниченность феррита; ε — диэлектрическая проницаемость феррита; V_Φ и $V_р$ — объемы феррита и резонатора соответственно.

Если образец достаточно мал, то можно считать, что при внесении его в резонатор поле в области, не занятой ферритом, не искажается, а поле внутри феррита и его намагниченность можно найти из решения статической задачи, что эквивалентно учету размагничивающих факторов формы.

Для образца, имеющего форму эллипсоида вращения с осью симметрии, направленной вдоль оси z, поперечные составляющие намагниченности $\vec{M}$ связаны с составляющими внешнего переменного магнитного поля $H_р$ следующим образом:

$$M_x = \frac{\chi^e}{\mu_0} H_{рx} - j \frac{k^e}{\mu_0} H_{рy},$$

$$M_y = j \frac{k^e}{\mu_0} H_{рx} + \frac{\chi^e}{\mu_0} H_{рy}, \tag{2}$$

где χ^e и k^e — составляющие тензора «внешней» восприимчивости феррита — имеют вид

$$\frac{\chi^e}{\mu_0} = \frac{\omega_\Phi \omega_M}{\omega_\Phi^2 - \omega^2}, \quad \frac{k^e}{\mu_0} = - \frac{\omega \omega_M}{\omega_\Phi^2 - \omega^2}. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_M = \mu_0 \gamma M_0; \ \omega_\Phi = \omega_0 - (N_z - N)\omega_M; \ \omega_0 = \mu_0 \gamma H_0; \tag{4}$$

ω_Φ — частота ферромагнитного резонанса, т. е. собственная частота низшего типа колебаний в феррите (однородная прецессия); H_0, M_0 — внешнее подмагничивающее поле и намагниченность образца (вдоль оси z); N_z, N — размагничивающие факторы в направлении оси z и в перпендикулярной плоскости соответственно.

Используя (2) и (3), получим

$$\int_{V_\Phi} \mu_0 \vec{M} \vec{H}_р^* dv = \int_{V_\Phi} \mu_0 \frac{\omega_\Phi \omega_M}{\omega_\Phi^2 - \omega^2} \left[|H_{рx}|^2 + |H_{рy}|^2 + \right.$$

$$\left. + j \frac{\omega}{\omega_\Phi} (H_{рy} H_{рx}^* - H_{рx} H_{рy}^*) \right] dv. \tag{5}$$

Поскольку нас интересуют частоты, близкие к собственной частоте резонатора, при которых свойства системы имеют сильную частотную зависимость, в дальнейшем мы не будем учитывать слабую частотную зависимость в выражениях для поля полого резонатора, не имеющую резонансного характера, полагая в них $\omega \simeq \omega_р$.

Кроме того, для простоты мы не будем учитывать влияния диэлектрических свойств феррита, полагая $\varepsilon = \varepsilon_0$. Характер явлений связи при этом не изменится.

Выражение (1) принимает при этом вид

$$\frac{\omega - \omega_р}{\omega_\Phi} = - \frac{\omega_M \omega_\Phi}{\omega_\Phi^2 - \omega^2} \frac{I_\Phi}{I_р}, \tag{6}$$

где

$$I_\Phi = \int_{V_\Phi} \mu_0 [|H_{рx}|^2 + |H_{рy}|^2 + j (H_{рy} H_{рx}^* - H_{рx} H_{рy})] dv; \tag{7}$$

$$I_р = \int_{V_р} (\mu_0 \vec{H} \vec{H}_р^* + \varepsilon_0 \vec{E} \vec{E}_р^*) \, dv.$$

Считая, что

$$\omega_{\Phi}^2 - \omega^2 \simeq (\omega_{\Phi} - \omega)\, 2\omega_{\Phi},$$

получим из (6)

$$(\omega - \omega_{\mathrm{p}})(\omega - \omega_{\Phi}) = \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{p}}\omega_{M}\frac{I_{\Phi}}{I_{\mathrm{p}}}. \tag{8}$$

В предельном случае, когда $V_{\Phi} \to 0$, уравнение (8) распадается на два независимых уравнения $\omega - \omega_{\mathrm{p}} = 0$, $\omega - \omega_{\Phi} = 0$. Первое из них дает собственную частоту полого резонатора, а второе представляет собой известное выражение Киттеля для частоты однородной прецессии в ферритовом сфероиде, расположенном в свободном пространстве. Для образца конечных размеров колебания в феррите и резонаторе уже не являются независимыми. По своему характеру они подобны колебаниям в связанных контурах.

Решение уравнения (8) имеет вид

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\omega_{\mathrm{p}} + \omega_{\Phi} \pm \sqrt{(\omega_{\mathrm{p}} - \omega_{\Phi})^2 + 2\omega_{\mathrm{p}}\omega_{M}\frac{I_{\Phi}}{I_{\mathrm{p}}}}\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, для частоты резонатора с ферритом мы получили два различных решения, определяемые размерами ферритового образца и резонатора, положением феррита в резонаторе, а также величиной намагничивающего поля. Это значит, что рассматриваемой системе вблизи каждого резонаторного типа свойственны две собственные частоты. Соответствующие колебания уже не являются чистыми резонаторными типами или однородной прецессией, а представляют собой смешанные феррито-резонаторные колебания. Следует отметить, что ни при каких значениях намагничивающего поля (если потери отсутствуют) не наблюдается совпадения указанных частот.

Для того чтобы учесть потери, положим

$$\omega = \omega' + j\omega'',$$

$$\omega_{\Phi} = \omega_{\Phi}' + j\omega_{\Phi}'' = \omega_0 - (N_z - N)\,\omega_{M} + j\mu_0\gamma\Delta H, \tag{10}$$

$$\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{p}}' + j\omega_{\mathrm{p}}'' = \omega_{\mathrm{p}}' + j\frac{\omega_{\mathrm{p}}'}{2Q},$$

где Q и ΔH — добротность полого резонатора и полуширина резонансной кривой феррита.

Отделяя в (9) действительную и мнимую части и полагая, что потери в системе достаточно малы, получим основные расчетные формулы, определяющие комплексные собственные частоты резонатора с ферритом:

$$\omega_{1,2}' \simeq \frac{1}{2}\left\{\omega_{\mathrm{p}}' + \omega_{\Phi}' \pm \sqrt{(\omega_{\mathrm{p}}' - \omega_{\Phi}')^2 + 2\omega_{\mathrm{p}}'\omega_{M}\frac{I_{\Phi}}{I_{\mathrm{p}}}}\right\},$$

$$\omega_{1,2}'' \simeq \frac{1}{2}\left\{\omega_{\mathrm{p}}'' + \omega_{\Phi}'' \pm \frac{(\omega_{\mathrm{p}}'' - \omega_{\Phi}'')(\omega_{\mathrm{p}}' - \omega_{\Phi}')}{\sqrt{(\omega_{\mathrm{p}}' - \omega_{\Phi}')^2 + 2\omega_{\mathrm{p}}'\omega_{M}\frac{I_{\Phi}}{I_{\mathrm{p}}}}}\right\}. \tag{11}$$

2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР С ФЕРРИТОВОЙ СФЕРОЙ

Полученные соотношения используются ниже для расчета прямоугольного резонатора с колебаниями типа H_{mn0}, содержащего намагниченную ферритовую сферу (рис. 1.)

Такая система часто используется на практике и является наиболее удобной для экспериментальной проверки теоретических результатов.

Структура поля колебаний типа H_{m0} в прямоугольном резонаторе без феррита определяется выражениями

$$E_{pz} = \sin k_{0x}x \sin k_{0y}y,$$

$$H_{px} = j\frac{k_{0y}}{\omega_0\mu_0}\sin k_{0x}x \cos k_{0y}y,$$

$$H_{py} = -j\frac{k_{0x}}{\omega_0\mu_0}\cos k_{0x}x \sin k_{0y}y,$$

где

$$k_{0x} = \frac{m\pi}{a}; \qquad k_{0y} = \frac{n\pi}{l};$$

$$k_{0x}^2 + k_{0y}^2 = k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0;$$

a и l — размеры резонатора, показанные на рис. 1. Для малых образцов феррита, слабо возмущающих структуру поля в резонаторе, можно считать

$$I_p = \int_{V_p} (\mu_0\vec{H}\vec{H}_p^* + \varepsilon_0\vec{E}\vec{E}_p^*)\,dv \simeq$$

$$\simeq \int_{V_p} (\mu_0\vec{H}_p\vec{H}_p^* + \varepsilon_0\vec{E}_p\vec{E}_p^*)\,dv =$$

$$= 2\varepsilon_0\int_{V_p} |\vec{E}_p|^2\,dv = 2\mu_0\int_{V_p} |\vec{H}_p|^2\,dv. \qquad (12)$$

В нашем случае

$$I_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 abl = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V_p,$$

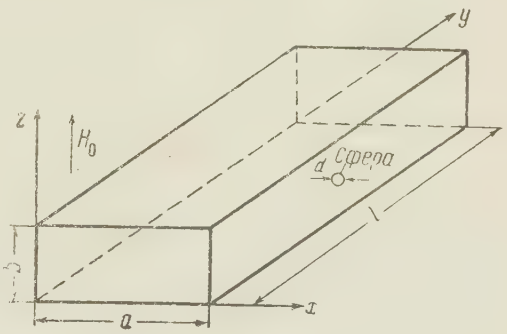


Рис. 1. Прямоугольный резонатор с ферритовой сферой

$$I_\Phi = \frac{V_\Phi\varepsilon_0}{k_0^2}(k_{0y}^2\sin^2 k_{0x}x\cos^2 k_{0y}y + k_{0x}^2\cos^2 k_{0x}x\sin^2 k_{0y}y). \qquad (13)$$

Выражения (11) при этом принимают вид

$$\omega'_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\omega'_p + \omega_0 \pm \sqrt{(\omega'_p - \omega_0)^2 + 4\frac{V_\Phi}{V_p}\omega_M\omega'_pT(x, y)}\right\},$$

$$\omega''_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{\omega''_p + \omega''_\Phi \pm \frac{(\omega''_p - \omega''_\Phi)(\omega'_p - \omega_0)}{\sqrt{(\omega'_p + \omega_0)^2 + 4\frac{V_\Phi}{V_p}\omega_M\omega'_pT(x, y)}}\right\}, \qquad (14)$$

где

$$T(x, y) = \frac{k_{0y}^2}{k_0^2}\sin^2 k_{0x}x\cos^2 k_{0y}y + \frac{k_{0x}^2}{k_0^2}\cos^2 k_{0x}x\sin^2 k_{0y}y. \qquad (15)$$

Зависимость собственных частот системы, рассчитанная по формуле (14), представлена на рис. 2 (резонаторное колебание типа H_{160}, сфера расположена в точке $x = a/2$, $y = l/2$). Как видно, она аналогична известному в радиотехнике графику Вина. При этом величина намагничивающего поля играет роль расстройки между контурами, а коэффициент

связи определяется размерами ферритового образца и положением его в резонаторе. По мере приближения величины постоянного магнитного поля к значению $H_{0p} = \omega_p/\mu_0\gamma$ происходит переход резонаторного типа колебаний в ферритовый, а также обратный переход. Величина H_{0p} представляет собой постоянное магнитное поле, соответствующее ферромагнитному резонансу в ферритовой сфере на частоте ω_p. Экспериментальные данные, представленные на рис. 2 в виде отдельных точек, хорошо согласуются с теоретическими результатами. Небольшие отклонения лежат в пределах погрешности измерений.

Соответствующим образом изменяется и затухание связанной системы $\omega''_{1,2}$, или, что то же, полуширина резонансных кривых связанной системы $\Delta\omega_{1,2} = \omega''_{1,2}$ (рис. 3). По мере того как резонаторное колебание перестраивается в ферритовое, полуширина его разонансной кривой постепенно изменяется от $\Delta\omega = \omega''_p = \omega'_p/2Q$ до величины $\Delta\omega = \omega''_\phi = \mu_0\gamma\Delta H$, со-

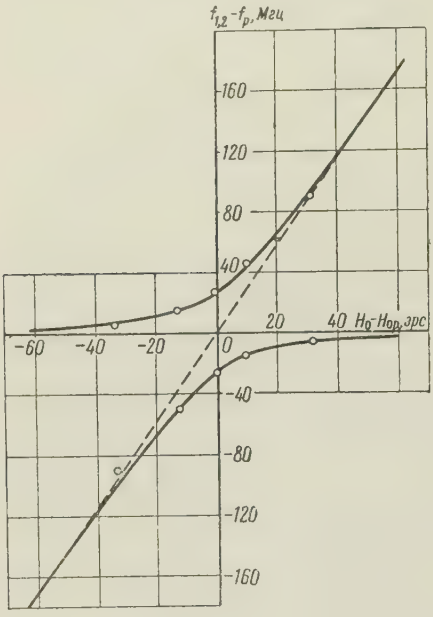


Рис. 2

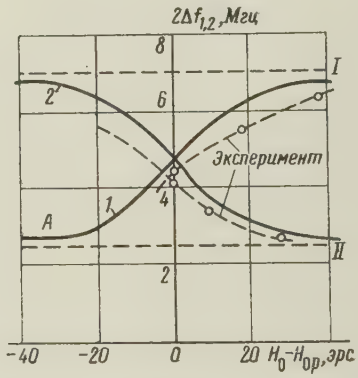


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость собственных частот связанной системы от намагничивающего поля ($a = 23$ мм, $b = 10$ мм, $l = 138$ мм, $d = 1{,}24$ мм, $4\pi M_0 = 1700$ гс)

Рис. 3. Зависимость ширины резонансных кривых $2\Delta f_{1,2}$ связанной системы от намагничивающего поля ($2\Delta H = 2{,}5$ эрс, $Q = 3650$):

I — ширина кривой ферритовой сферы; *II* — ширина кривой полого резонатора

ответствующей полуширине линии однородной прецессии ферритового образца (кривая *1*). Полуширина кривой второго колебания при этом изменяется от $\Delta\omega = \omega''_\phi$ до $\Delta\omega = \omega''_p$ (кривая *2*). Экспериментальные точки на ветви *A* кривой *1* снять не удалось, так как при этих полях резонаторное колебание помимо перестройки с однородной прецессией взаимодействовало также и с одним из высших типов колебаний ферритового образца.

Следует указать, что ширина резонансной кривой связанной системы феррит—резонатор по постоянному магнитному полю $2\delta H$ отличается от ширины резонансной кривой феррита $2\Delta H$, которая обычно используется для характеристики магнитных потерь феррита, расположенного в свободном пространстве или в волноводе. Ниже показано, что величина $2\delta H$ не остается постоянной, а существенным образом зависит от рабочей частоты и параметров связанной системы.

3. РЕЗОНАНСНАЯ КРИВАЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ ПО ПОСТОЯННОМУ ПОЛЮ

Исследование системы, состоящей из резонатора с ферритом, можно упростить, если воспользоваться аналогией между этой системой и обычными связанными контурами, хорошо изученными в радиотехнике (рис. 4). Прежде всего для системы феррит—резонатор необходимо ввести понятие о коэффициенте связи. Это можно сделать, сравнивая выражения для минимального разноса частот связи в рассматриваемой системе и в связанных контурах. Как следует из (11), минимальное расстояние между частотами связи резонатора с ферритом, когда $\omega'_\Phi = \omega'_р$, равно

$$\omega'_1 - \omega'_2 = \sqrt{2\omega'_р\omega_M \frac{I_\Phi}{I_р}}. \qquad (16)$$

Соответствующее выражение для связанных контуров (при слабой связи) имеет вид

$$\omega'_1 - \omega'_2 = K\omega'_к, \qquad (17)$$

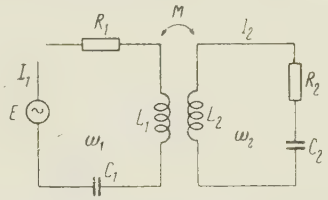


Рис. 4. Система связанных контуров

где K — коэффициент связи между контурами; $\omega'_к$ — собственная частота каждого из контуров.

Сравнивая (16) и (17), получим выражение коэффициента связи для системы феррит — резонатор:

$$K = \sqrt{2\frac{\omega_M}{\omega'_р}\frac{I_\Phi}{I_р}}. \qquad (18)$$

Полученные выше выражения для частот и затуханий справедливы при условии, что потери в феррите и резонаторе малы. Из теории связанных контуров известно, однако, что потери могут существенно влиять на характеристики системы. Так, например, если декремент затухания второго контура (рис. 4)

$$d_2 > K, \qquad (19)$$

то при равенстве собственных частот обоих контуров система имеет только одну собственную частоту. Перенося этот результат на систему феррит—резонатор и отождествляя образец феррита со вторым контуром, можно найти критические потери в феррите, при которых отсутствует перестройка колебаний феррита и резонатора. Считая, что декремент затухания феррита

$$d_\Phi = \frac{2\Delta\omega_0}{\omega'_\Phi} = \frac{2\mu_0\gamma\Delta H}{\omega'_\Phi}, \qquad (20)$$

получим критическое значение $\Delta\omega_0$:

$$\Delta\omega_{0\,кр} = \sqrt{\frac{\omega_M\omega'_р}{2}\frac{I_\Phi}{I_р}}. \qquad (21)$$

Пользуясь аналогией со связанными контурами, найдем теперь выражение для полуширины резонансной кривой системы феррит—резонатор по постоянному магнитному полю. Для двух связанных контуров (рис. 4) легко можно получить уравнение резонансной кривой по отношению к настройке одного из контуров. Так, например, зависимость тока I_2 во втором контуре от расстройки этого контура можно получить, используя известные соотношения (см., например, [4]):

$$\frac{I_2}{I_{2макс}} = \sqrt{\frac{(K^2 + d_1 d_2)^2 + p^2 d_2^2 - \dfrac{K^4 p^2}{p^2 + d_1^2}}{(K^2 + d_1 d_2)^2 + p^2 d_2^2 - 2K^2 p\xi + (p^2 + d_1^2)\xi^2}}, \qquad (22)$$

где

$$K^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2};\ d_1 = \frac{R_1}{\omega_1 L_1};\ d_2 = \frac{R_2}{\omega_2 L_2};\ p = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2};\ \xi = 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}. \quad (23)$$

Ширина кривой, описываемой уравнением (22) на уровне 0,7, равна

$$2\Delta\omega_2 \simeq \omega \sqrt{\frac{d_2^2 p^2}{p^2 + d_1^2} + \frac{K^2 d_1^2}{(p^2 + d_1^2)^2}}. \quad (24)$$

При выводе этой формулы предполагалось, что

$$K \gg d_1 \sim d_2 \text{ и } \omega \simeq \omega_1 \simeq \omega_2. \quad (25)$$

Выражение для полуширины резонансной кривой системы феррит—резонатор по постоянному магнитному полю δH можно получить из формулы (24), заменив собственную частоту второго контура ω_2 собственной частотой феррита ω_Φ. Тогда величине $2\Delta\omega_2$ будет соответствовать $2\Delta\omega_\Phi = 2\mu_0\gamma\delta H$. Кроме того, вместо величин K и d_2 следует использовать соответствующие величины, определяемые формулами (18) и (20). После несложных преобразований получим

$$\delta H \simeq \sqrt{\frac{\Delta H^2}{1+\alpha} + \left(\frac{\alpha M_0 \frac{I_\Phi}{I_p} Q}{1+\alpha}\right)^2}, \quad (26)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega^2}{4Q^2(\omega - \omega_p)^2};\ Q = \frac{1}{a_1}.$$

Как видим, ширина резонансных кривых существенно меняется при изменении частоты генератора, достигая максимума при $\omega = \omega_p$:

$$\delta H_{\text{макс}} = M_0 Q \frac{I_\Phi}{I_p}. \quad (27)$$

Если индикатор резонанса связан не с ферритом, а с резонатором (что обычно бывает на практике), то наблюдаемые резонансные кривые связанной системы будут определяться током I_1, который соответствует полю в резонаторе, а не током I_2, определяющим намагниченность феррита. Используя соотношение (23), можно получить выражение для модуля тока I_1 [4]:

$$|I_1| = \frac{\frac{E}{\omega L_1}\sqrt{\xi^2 - a_2^2}}{\sqrt{\xi^2(p^2 + d_1^2) - \xi 2k^2 p + p^2 d_2^2 + (K^2 + d_1 d_2)^2}}. \quad (28)$$

Дифференцируя (28) по ξ, получим значение ξ, соответствующее максимуму и минимуму тока I_1:

$$\xi = \frac{K^2 + 2d_1 d_2}{2p} \pm \sqrt{\frac{(K^2 + 2d_1 d_2)^2}{4p^2} + d_2^2}. \quad (29)$$

Верхний знак соответствует максимуму тока, нижний — минимуму. Уравнение резонансной кривой связанной системы

$$\frac{|I_1|}{|I_{1\text{макс}}|} = f(\xi) \quad (30)$$

получим, подставляя $\xi_{\text{макс}}$ в (28).

Несколько резонансных кривых, рассчитанных по формуле (30), риведено на рис. 5. При изменении частоты генератора изменяется не олько ширина резонансных кривых, но и их форма.

При достаточно больших расстройках ($p \simeq 10\, d_1$) резонансная кривая очти симметрична и имеет слабо выраженный минимум. При уменьшении p асимметрия резонансной кривой увеличивается и минимум становит-

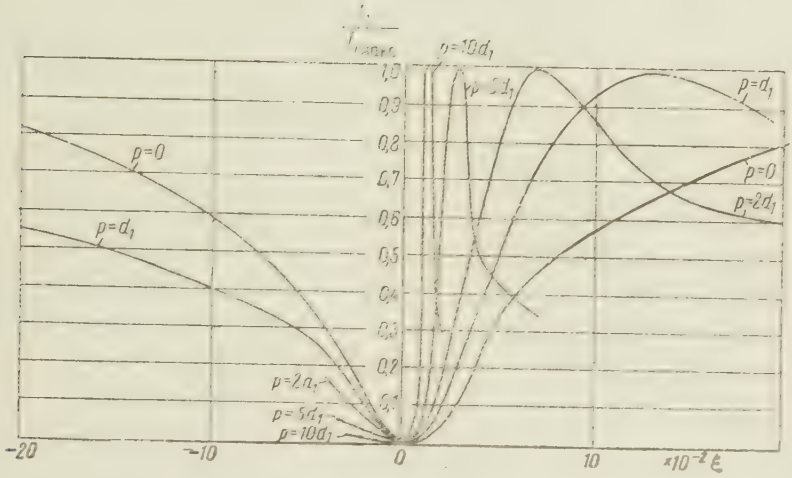


Рис. 5. Резонансные кривые связанной системы феррит — резонатор по полю ($K = 0{,}6 \cdot 10^{-2}$, $d_1 = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$, $d_2 = 0$)

и ярко выраженным, причем максимум тока I_1 сдвигается в область ольших расстроек ξ. При $p = 0$, т. е. когда частота генератора ω совпадает частотой резонатора ω_0, резонансная кривая полностью «переворачивается» и имеет только минимум при $\xi = 0$. Можно показать, что ширина гой кривой так же, как и для тока I_2, определяется формулой (27).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. езонатор и помещенный в него малый ферритовый образец представляют обой связанную систему, обладающую двумя собственным частотами — астотами связи. Степень связи в основном определяется отношением объмов феррита и резонатора и положением ферритового образца в резонаторе. Так как резонатор имеет множество собственных частот ω_{pn}, то вблизи аждой из этих частот будут наблюдаться описанные явления, причем тепень связи феррита с резонатором будет определяться структурой поля ответствующих частоты и типа колебаний. Это показано на рис. 6, где ы ограничились двумя собственными частотами.

Не только однородная прецессия, но и другие магнитостатические типы олебаний оказываются связанными с собственными колебаниями резонатора. На рис. 7 для иллюстрации показана связь резонаторного колебания с одним из высших типов колебаний ферритового образца. Расет этих явлений можно также провести при помощи формулы (1). При ом вместо соотношений (2) следует использовать известные выражения], связывающие намагниченность и поле для рассматриваемого типа колеаний в феррите.

Резонансная кривая системы феррит — резонатор по постоянному магитному полю может сильно отличаться от резонансной кривой ферритого образца, расположенного в свободном пространстве. Ее ширина

$2\,\delta H$ зависит не только от магнитных потерь феррита, но также и от других параметров системы. Поэтому при измерении ΔH феррита в резонаторе следует соблюдать известную осторожность. Если связь феррита с резонатором больше критической, измерения следует проводить на частотах, далеких от собственной частоты резонатора. В таких случаях более целесообразно проводить измерения в волноводе.

Для расчета связанных систем феррит — резонатор может быть также использован метод собственных функций [3], который приводит к тем же результатам, что и примененный в настоящей работе метод малых возмущений.

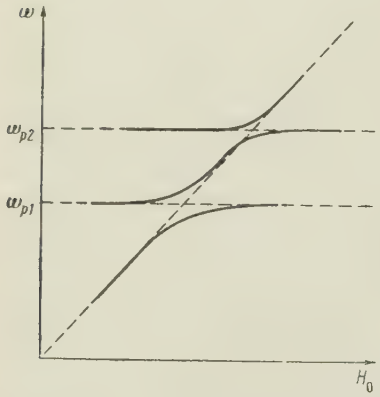


Рис. 6. Связь двух типов колебаний в резонаторе с однородной прецессией

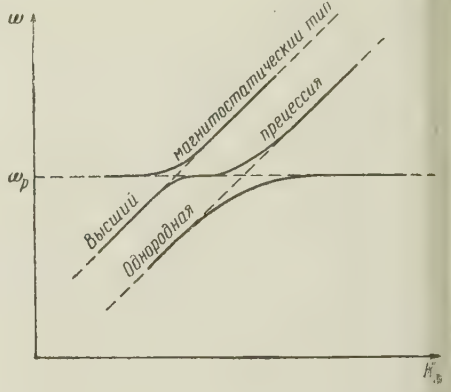


Рис. 7. Связь двух типов колебаний в феррите с одним из резонаторных типов колебаний

Помимо взаимодействия ферритового образца с резонатором возможна и взаимная связь двух (или нескольких) близко расположенных ферритовых образцов. Это также легко наблюдается экспериментально. Кроме того, явления связи могут наблюдаться и при размещении в резонаторе нескольких образцов феррита. Соответственно количеству образцов при этом увеличивается число резонансных пиков связанной системы.

Рассмотренные в настоящей работе явления можно практически использовать для создания различного рода систем СВЧ. Совершенно очевидна возможность эффективной перестройки частоты резонаторов. Из рис.2 видно, что зависимость частоты от намагничивающего поля наиболее резко выражена в области, где частота ферромагнитного резонанса близка к собственной частоте резонатора. Это позволяет получить значительные изменения резонансных частот при помощи сравнительно небольших изменений магнитного поля.

В отличие от известного способа перестройки частоты резонаторов при помощи феррита, когда используется область малых полей, а работа вблизи ферромагнитного резонанса нецелесообразна из-за значительного ухудшения добротности резонатора, рассматриваемый метод позволяет получить эффективную перестройку частоты, не сопровождающуюся существенным изменением потерь, в особенности, если выбрать $\omega''_{\phi} = \omega''_{p}$ (см. формулу (14) и рис. 3).

Связанная система феррит — резонатор может служить также и в качестве многочастотного перестраиваемого фильтра. Количество рабочих частот такого фильтра зависит от числа ферритовых образцов, размещенных в резонаторе. Малые приращения поля, необходимые для перестройки собственной частоты, позволяют использовать связанную систему для

здания быстродействующего переключателя или выключателя. Воз-жны и другие применения свойств связанной системы феррит—резонатор.

Авторы выражают благодарность А. А. Пистолькорсу за ценные за-ечания.

ЛИТЕРАТУРА

Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, II, стр. 442, ИЛ, 1960.

P. C. Fletcher, R. O. Bell, Ferrimagnetic resonance modes in spheres, J. Appl. Phys., 1959, 30, 5, 687.

А. Л. Микаэлян, Нелинейная теория ферритовых генераторов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 1, 46.

Б. П. Асеев, Основы радиотехники, Связьиздат, 1947.

Поступила в редакцию
26 VII 1960

К РАСЧЕТУ ПОЛЯРИЗАЦИЙ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ВЕРОЯТНОСТЯМ ПЕРЕХОДА ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ПАРАМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ

М. И. Родак

Для электронного парамагнитного резонанса в кристалле $(K_3(CoCr)(CN)_6$, содержащем два магнитных комплекса, рассчитаны поляризации переменного магнитного поля (как линейно-, так и эллиптически-поляризованного), обеспечивающие экстремумы вероятности индуцированного перехода.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в экспериментах по электронному парамагнитному резонансу (ЭПР) весьма существен правильный выбор поляризации переменного магнитного поля, в большой мере определяющей вероятность индуцированного перехода. При условии изотропности g-фактора вероятность P_{mn} перехода mn пропорциональна величине $|\vec{h}^{*}\vec{S}|^2$ (см., например, [1]):

$$P_{mn} \sim |\vec{h}^{*}\vec{S}|^2 = (h_x^{*}S_x + h_y^{*}S_y + h_z^{*}S_z)(h_xS_x^{*} + h_yS_y^{*} + h_zS_z^{*}), \qquad (1)$$

где $\vec{h}$ — единичный комплексный вектор, составляющие которого являются комплексными направляющими косинусами индуцирующего магнитного поля $\vec{H}(t)$ амплитуды $\vec{H}_1$ и частоты ω:

$$\vec{H}(t) = \mathrm{Re}\,[H_1\vec{h}e^{-i\omega t}].$$

При этом $|\vec{h}|^2 = \Sigma h^{*}_j h_j = 1$, $\vec{h} = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2$, $h_j = h_{1j} + ih_{2j}$, $j = x, y, z$, $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, h_{1j}, h_{2j} — действительны.

Напомним, что комплексность $\vec{h}$ соответствует эллиптической поляризации поля $\vec{H}(t)$: мнимая часть отстает по фазе от действительной на $\pi/2$, и эллипс поля обходится в направлении от $\vec{h}_1$ к $\vec{h}_2$; $\vec{S}_{mn}$ — также комплексный вектор, составляющие которого S_x, S_y, S_z — матричные элементы операторов составляющих спина для перехода mn; в общем случае они комплексны; $S_j = S_{1j} + iS_{2j}$, $j = x, y, z$. Вектор $\vec{S}_{mn}$ и соответствующий эллипс будем в дальнейшем для краткости называть соответственно «вектором спина» и «эллипсом спина», опуская кавычки и значок mn у $\vec{S}$.

Таким образом, вероятность перехода P_{mn} пропорциональна квадрату модуля скалярного произведения двух комплексных векторов $\vec{h}$ и $\vec{S}$, экстремальные свойства которого известны [2] и легко формулируются на геометрическом языке. Действительно, модуль скалярного произведения заданного комплексного вектора $\vec{S}$ и произвольного единичного

омплексного вектора $\vec{h}$ достигает максимума, когда $\vec{h}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, е. оба соответствующих эллипса подобны, одинаково ориентированы обходятся в одном направлении. При этом

$$|\vec{h}^*\vec{S}|^2 = |S_x|^2 + |S_y|^2 + |S_z|^2 = S_1^2 + S_2^2,$$

де S_1 и S_2 — длины главных полуосей эллипса спина. Модуль $|\vec{h}^*\vec{S}|$ остигает минимума (равного нулю), когда $\vec{h}$ и $\vec{S}$ ортогональны, т. е. либо: оба эллипса подобны, лежат в одной плоскости, но повернуты один носительно другого на 90° и обходятся в противоположных направлениях, б) эллипс поля вырождается в прямую, перпендикулярную плоости эллипса спина, в) $\vec{h}$ представляет собой линейную комбинацию екторов, описанных в а) и б).

Если ограничиться линейно-поляризованными полями, то $|\vec{h}^*\vec{S}|^2$ имеет кстремальные значения $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_3$ при ориентации $\vec{h}$ в трех взаимно ерпендикулярных направлениях — по двум главным осям эллипса спиа и по перпендикуляру к нему; при этом $\bar{\lambda}_1 = S_1^2$, $\bar{\lambda}_2 = S_2^2$, $\bar{\lambda}_3 = 0$.

Итак, задача подбора поляризации переменного магнитного поля (единичного вектора $\vec{h}$ или эллипса поля), обращающей вероятность рассматриваемого перехода в максимум или нуль, сводится к определению эллипса спина — к расчету соответствующей этому переходу * тройки атричных элементов S_x, S_y, S_z. Так обстоит дело с кристаллами, лементарная ячейка которых содержит лишь один магнитный комплекс. Если же в кристалле содержатся несколько несовпадающих магнитых комплексов, которым соответствуют, вообще говоря, разные комплексые векторы $\vec{S}$ (разные эллипсы спина), вопрос об экстремальных значениях вероятности перехода для кристалла в целом нуждается в дополнительном рассмотрении.

1. РАСПОЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОВ СПИНА ПРИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ОРИЕНТАЦИЯХ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Покажем предварительно, что при некоторых частных направлениях остоянного магнитного поля $\vec{H}_0$ можно предсказать расположение эллипса спина, не рассчитывая матричных элементов S_x, S_y, S_z. Эти направления связаны с главными осями магнитных комплексов [3] (или, короче, магнитными осями) x, y, z, в которых обычно и записывается исходный пин-гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ системы **. Важно помнить, что знак постоянного агнитного поля $\vec{H}_0$ следует выбирать в соответствии с выбором правой ли левой системы координат (магнитное поле — псевдо-вектор) [4].

ассмотрим случай, когда постоянное поле $\vec{H}_0$ лежит в плоскости двух агнитных осей (например, x и y). Тогда легко доказать, что для каждого з переходов эллипс спина расположен в плоскости, перпендикулярной лоскости xy, и главная ось его направлена по третьей магнитной оси — си z.

---

* Если система энергетических уровней такова, что имеются совпадающие по остотам переходы с различными векторами $\vec{S}$, задача, очевидно, осложняется неободимостью учета различия в весах этих разных $\vec{S}$, зависящего от условий эксперимента.

** Магнитные оси направлены по трем взаимно перпендикулярным прямым, общем случае определяемым экспериментально по угловому изменению спектра ПР; при этом оба противоположных направления вдоль магнитной оси равноправны.

Действительно, отразим мысленно ось z относительно плоскости xy. Изменение типа тройки осей (левой на правую или наоборот) требует изменения направления поля $\vec{H}_0$ в пространстве на противоположное. Воспользуемся далее тем фактом, что в произвольной заданной системе координат при изменении знака $\vec{H}_0$ матричные элементы S_x, S_y, S_z с точностью до общего знака * заменяются комплексно-сопряженными S_x^*, S_y^*, S_z^***, что, очевидно, означает изменение направления обхода по эллипсу спина. Таким образом, относительно двух систем координат (с двумя противоположными направлениями оси z) искомый эллипс спина должен быть расположен одинаково, но иметь противоположные направления обхода, из чего и следует наше утверждение.

В качестве примера приведем широко известный рубин (Cr^{3+} в корунде Al_2O_2), изумруд (Cr^{3+} в $Be_3Al_2Si_6O_{18}$) и другие кристаллы с аксиальной симметрией магнитных свойств. В них обычно по кристаллографической оси направляют ось z, а ось x или y, естественно, располагают в плоскости H_0z. Расчет [1] подтверждает, что плоскость эллипса спина и его главная ось перпендикулярны плоскости H_0z. Как следствие доказанного получаем, что если поле $\vec{H}_0$ направлено вдоль какой-либо из магнитных осей (например, оси z), эллипс спина либо расположен в перпендикулярной полю $\vec{H}_0$ плоскости и имеет главные оси вдоль осей x и y, либо вырождается в прямую вдоль $\vec{H}_0$. Примером является рубин при поле $\vec{H}_0$, направленном вдоль или перпендикулярно кристаллографической оси. Наконец, очевидно, если поле $\vec{H}_0$ направлено вдоль оси аксиальной симметрии, эллипс спина, лежащий в плоскости, перпендикулярной постоянному полю, превращается в окружность.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРЕХОДА ДЛЯ ДВУХКОМПЛЕКСНОГО КРИСТАЛЛА

Обратимся к случаю двухкомплексного кристалла. Поскольку оба комплекса представлены в кристалле одинаково, вероятность перехода для кристалла в целом записывается в виде суммы (с весом $^1/_2$) двух выражений (1) в координатах x, y, z и x', y', z' магнитных осей обоих комплексов соответственно.

Для конкретности рассмотрим кристалл $K_3Co(CN)_6$ с примесью парамагнитного иона Cr^{3+}; будем в дальнейшем называть его кратко цианидом хрома. В этом кристалле две магнитные оси (y и y') разных комплексов направлены по одной из кристаллографических осей (оси c), магнитные оси x и x' симметрично примыкают к оси b, а оси z и z' — к оси a [5]. В подобных кристаллах, с целью обеспечить совпадение спектров ЭПР от обоих магнитных комплексов, постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$ располагают обычно в плоскостях симметрии ac или bc. Для каждого из этих двух случаев направления осей координат (вдоль магнитных осей) естественно выбрать так, чтобы одноименные оси разных комплексов были расположены симметрично относительно поля $\vec{H}_0$. При этом проекции $\vec{H}_0$ на оси координат x, y, z и x', y', z' соответственно одинаковы, но так как одна из троек осей оказывается левой, а другая — правой, магнитное

* Одновременное изменение знака всех трех составляющих комплексного вектора, очевидно, полностью сохраняет соответствующий эллипс и направление обхода по нему, меняя лишь не интересующее нас начало отсчета времени обхода.

** Для спин-гамильтониана достаточно распространенного вида $\hat{\mathcal{H}} = \beta g \vec{H} \hat{\vec{S}} + D\left[\hat{S}_z^2 - \frac{1}{3}S(S+1)\right] + E(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)$ этот факт доказывается непосредственным расчетом.

оле $\vec{H}_0$ имеет для обоих комплексов разные знаки, что дает для матричных элементов в этих двух системах координат соотношение

$$S_j = S^*_{j'},\ j = x, y, z. \tag{2}$$

Это означает, что эллипсы спина обоих комплексов расположены симметрично относительно плоскости, в которой лежит поле $\vec{H}_0$ (плоскости ac или bc), причем направления обхода одинаковы для проекций эллипсов спина на плоскость ab и противоположны для проекций этих эллипсов на плоскость симметрии (ac или bc соответственно).

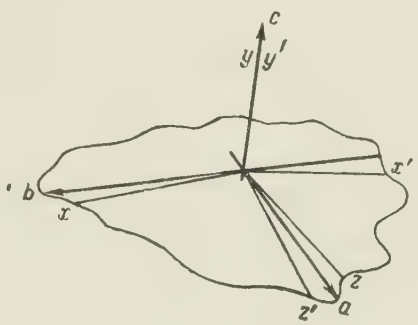


Рис. 1

Ограничимся рассмотрением случая, когда поле $\vec{H}_0$ расположено в плоскости ac (для плоскости bc расчет и результаты совершенно аналогичны). Тогда можно принять системы координат x, y, z и x', y', z', описываемые следующей таблицей направляющих косинусов [5] (рис. 1), где обозначено: $\xi = 0{,}104$, $\eta = 0{,}994$.

	x	y	z
a	ξ	0	η
b	$\pm\eta$	0	$\mp\xi$
c	0	1	0

Приводя составляющие h_x, h_y, h_z, $h_{x'}$, $h_{y'}$, $h_{z'}$ к кристаллографической системе координат a, b, c и учитывая равенство (2), получим вероятность перехода для кристалла в целом в виде

$$\begin{aligned} P_{mn} \sim \frac{1}{2}|\vec{h}^*\vec{S}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{h}'^*\vec{S}'|^2 = \\ = f(h_{1a}, h_{2a}, h_{1b}, h_{2b}, h_{1c}, h_{2c}) = \\ = M|h_a|^2 + N|h_b|^2 + \\ + |S_y|^2|h_c|^2 + S(h_{1a}h_{1c} + h_{2a}h_{2c}) + \\ + S'(h_{1b}h_{2c} - h_{1c}h_{2b}) + \\ + S'_{xz}(h_{1b}h_{2a} - h_{1a}h_{2b}), \end{aligned} \tag{3}$$

где h_{1j}, h_{2j} ($j = a, b, c$) — соответственно действительные и мнимые части комплексных направляющих косинусов переменного магнитного поля относительно осей a, b, c;

$$M = \xi^2|S_x|^2 + \eta^2|S_z|^2 + \xi\eta S_{xz};\quad N = \eta^2|S_x|^2 + \xi^2|S_z|^2 - \xi\eta S_{xz};$$

$$S = \xi S_{xy} + \eta S_{yz};\quad S' = \eta S'_{xy} + \xi S'_{yz};$$

$$S_{kl} = S_k S^*_l + S_l S^*_k = 2(S_{1k}S_{1l} + S_{2k}S_{2l});$$

$$S'_{kl} = i(S_k S^*_l - S_l S^*_k) = 2(S_{1k}S_{2l} - S_{2k}S_{1l});$$

$$k, l = x, y, z.$$

3. УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА

Задача определения поляризаций переменного магнитного поля, соответствующих экстремальным значениям вероятности перехода (3), сводится к отысканию комплексных направляющих косинусов поля (напишем числа h_{1a}, h_{2a}, h_{1b}, h_{2b}, h_{1c}, h_{2c}), соответствующих экстремумам

квадратичного полинома f в правой части (3), при выполнении условия

$$\varphi(h_{1a} \dots h_{2c}) = h_{1a}^2 + \dots h_{2c}^2 - 1 = 0. \quad (4)$$

Решая эту задачу отыскания относительного (условного) экстремума, согласно методу множителей Лагранжа, требуем обращения в нуль всех шести частных производных (по всем составляющим $\vec{h}$) от вспомогательной функции Ф параметра λ:

$$\Phi = f - \lambda\varphi.$$

Из полученной системы шести уравнений, вместе с условием связи (4), определяем λ, а затем и $h_{a1} \dots h_{2c}$. Равенство нулю определителя системы дает уравнение шестой степени с тремя двукратными корнями:

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(M + N + |S_y|^2) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(M + N + |S_y|^2)^2 + S^2 + S'^2 + S_{xz}'^2 - 4(MN + M|S_y|^2 + N|S_y|^2)}.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial h_{1a}} h_{1a} + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial h_{2c}} h_{2c} = 2\Phi - 2\lambda = 0$$

и, следовательно, в экстремальной точке имеет место равенство

$$f = \lambda.$$

Таким образом, при изменении поляризации переменного поля величина полинома f (будем в дальнейшем для краткости называть его вероятностью перехода) меняется в пределах от нуля до λ_2 с промежуточным экстремальным значением λ_3. Соответствующие этим трем λ единичные эллипсы поля (будем их называть «экстремальными») определяются из подсистемы трех уравнений (из состава первоначальных шести) вида

$$\begin{aligned} 2(M - \lambda)h_{1a} - S_{xz}'h_{2b} + Sh_{1c} &= 0, \\ -S_{xz}'h_{1a} + 2(N - \lambda)h_{2b} - S'h_{1c} &= 0, \\ Sh_{1a} - S'h_{2b} + 2(|S_y|^2 - \lambda)h_{1c} &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует, что все три экстремальных эллипса поля расположены в плоскостях, перпендикулярных плоскости симметрии ac, и имеют по главной оси вдоль оси b. Этого следовало ожидать, учитывая симметрию в расположении эллипсов спина обоих комплексов и их равноправие.

В общем случае углы между плоскостями трех экстремальных эллипсов поля, как и форма самих эллипсов, оказываются весьма разнообразными; однако, как мы увидим ниже, в ряде случаев картина упрощается и становится достаточно наглядной.

Предварительно укажем решение нашей экстремальной задачи для линейной поляризации переменного поля. Поскольку вектор $\vec{h}$ теперь действителен, задача сводится к предыдущей, если во всех соотношениях положить $h_{2a} = h_{2b} = h_{2c} = 0$. Равенство нулю определителя системы трех полученных уравнений дает кубическое уравнение с корнями

$$\bar{\lambda}_1 = N,$$

$$\bar{\lambda}_{2,3} = \frac{1}{2}(M + |S_y|^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(M - |S_y|^2)^2 + S^2}. \quad (5)$$

Эти три $\bar{\lambda}$ являются экстремальными значениями вероятности перехода — теперь уже в пределах линейной поляризации переменного поля. При

ом $\bar{\lambda}_1$ соответствует ориентации переменного магнитного поля по оси
а $\bar{\lambda}_2$ и $\bar{\lambda}_3$ — ориентациям по двум взаимно перпендикулярным прямым
плоскости *ac*, уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{\bar{2}\,(\lambda_2 - |S_y|^2)}{S} = \frac{M - |S_y|^2 + \sqrt{(M-|S_y|^2)^2 + S^2}}{S}, \qquad (6)$$

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{2\,(\bar{\lambda}_3 - |S_y|^2)}{S} = -\frac{S}{M - |S_y|^2 + \sqrt{(M-|S_y|^2)^2 + S^2}}. \qquad (7)$$

тметим, что для цианида хрома $\bar{\lambda}_3$ обычно много меньше, чем $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$.

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ В РАСПОЛОЖЕНИИ ЭЛЛИПСОВ СПИНА ОБОИХ КОМПЛЕКСОВ

Рассмотрим два частных случая во взаимном расположении эллипсов
ина обоих магнитных комплексов; укажем заранее, что в цианиде хро-
практически только эти случаи и реализуются.

С л у ч а й *А*. Эллипсы спина обоих комплексов лежат в одной пло-
ости, перпендикулярной плоскости *ac* (рис. 2). Необходимым и до-
аточным признаком этого является
полнение условия

$$\bar{\lambda}_3 = 0$$

ли

$$4M|S_y|^2 = S^2. \qquad (8)$$

ри этом один из трех экстремальных
липсов поля, соответствующий веро-
ности перехода $\lambda_1 = 0$, вырождает-
в прямую, описываемую уравнени-
м (7); эта прямая, очевидно, перпен-
икулярна плоскости, содержащей ис-
одные эллипсы спина обоих комплек-
ов. Два других экстремальных эллипса
оля лежат, естественно, в этой последней плоскости, причем у обоих
лавные оси направлены по оси *b* и по прямой, описываемой уравнением
). Направления обхода по этим эллипсам противоположны, причем «мак-
имальный» эллипс (соответствующий λ_2) обходится так же, как и ис-
одные эллипсы спина.

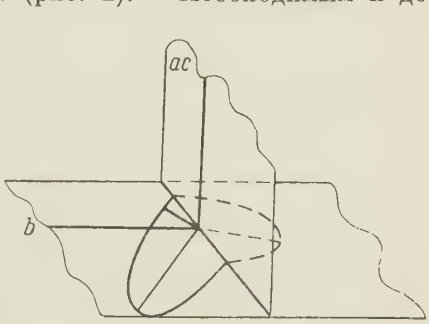


Рис. 2

В еще более частных случаях можно определить также форму эллип-
ов. Так, пусть главные оси эллипсов спина обоих комплексов отклонены
плоскости *ac* на 45°; признаком этого является помимо равенства (8)
ополнительное равенство

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$$

ли

$$N = M + |S_y|^2. \qquad (9)$$

ри этом оба невырождающихся экстремальных эллипса поля обращаются
окружности с противоположными направлениями обхода и соответст-
ующими вероятностями перехода

$$\lambda_{2,3} = N \pm \frac{1}{2}\sqrt{S'^2 + S'^2_{xz}} = \frac{1}{2}(S_1 \pm S_2)^2.$$

усть в другом частном случае эллипсы спина обоих комплексов совпада-
т, признаком чего является помимо равенства (8) дополнительное ра-
енство

$$4N(M + |S_y|^2) = S'^2 + S'^2_{xz}. \qquad (10)$$

При этом мы, очевидно, возвращаемся к случаю однокомплексного кристалла, когда

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_2 = S_1^2 + S_2^2 = |S_x|^2 + |S_y|^2 + |S_z|^2 = M + N + |S_y|^2.$$

Наконец, одновременное выполнение условий (8), (9) и (10) означает, что исходные эллипсы спина являются совпадающими окружностями.

Отметим, что в цианиде хрома рассмотренный нами случай A точно реализуется, когда постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$ направлено по оси c (по магнитным осям y и y' обоих комплексов), см. § 1. При этом $S = S' = 0$, оба эллипса спина либо лежат в плоскости ab и главные оси их направлены по осям x и z (x' и z' соответственно), либо они вырождаются в прямую вдоль оси c.

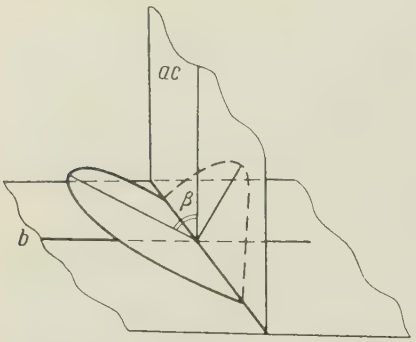


Рис. 3

Случай $Б$. Эллипсы спина обоих комплексов заведомо не лежат в одной плоскости, а пересекаются по главной оси, лежащей, очевидно, в плоскости ac (рис. 3). Необходимым и достаточным признаком этого является нарушение условия (8) и одновременно выполнение более общего условия

$$2S'S'_{xz}(M - |S_y|^2) = S(S'^2_{xz} - S'^2). \quad (11)$$

Пусть длина главной оси, по которой эллипсы спина пересекаются, равна $2S_1$, а угол между их плоскостями равен 2β. В этом случае при линейной поляризации переменного поля экстремальные вероятности перехода $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ и $\bar{\lambda}_3$, определяемые соотношениями (5), равны соответственно $S_2^2 \sin^2\beta$, S_1^2 и $S_2^2 \cos^2\beta$; они реализуются при ориентациях переменного поля соответственно по оси b, по прямой пересечения обоих эллипсов спина и по перпендикулярной к этой прямой проекции второй главной полуоси S_2 эллипса спина на плоскость ac. В общем случае эллиптической поляризации получаем два экстремальных эллипса поля в плоскости, проходящей через ось b, и прямую пересечения эллипсов спина: максимальный эллипс поля, подобный проекции на эту плоскость исходного эллипса спина и имеющий то же направление обхода, соответствует вероятности перехода $\lambda_2 = S_1^2 + S_2^2 \sin^2\beta$; второй эллипс поля, отличающийся от первого поворотом в его же плоскости на 90° и изменением направления обхода, дает вероятность перехода $\lambda_1 = 0$. Третий экстремальный эллипс поля вырождается в прямую, перпендикулярную плоскости двух рассмотренных экстремальных эллипсов; вероятность перехода при этом $\lambda_3 = \bar{\lambda}_3$.

В цианиде хрома случай $Б$ заведомо имеет место, когда постоянное поле $\vec{H}_0$ направлено по оси a^* — в плоскости магнитных осей x, z и x', z'. При этом (см. § 1) эллипсы спина обоих комплексов пересекаются по оси y,

$$S = S'_{xz} = 0, \quad \mathrm{tg}^2\beta = \frac{N}{M}, \quad \bar{\lambda}_2 = S_1^2 = |S_y|^2,$$

$$S_2^2 = M + N, \quad \bar{\lambda}_1 = N, \quad \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 = M, \quad \lambda_2 = N + |S_y|^2.$$

* А также, очевидно, по оси b, если $\vec{H}_0$ располагают в плоскости bc.

ущественно, что поскольку, как показывает расчет, из условия (8) сле-ет условие (11), выполнение последнего является достаточным признаком реализации хотя бы одного из двух рассмотренных частных случаев.

Из расчета для цианида хрома по вычисленным на БЭСМ комбинациям атричных элементов S_j [6] следует, что равенство (11) имеет место в этом ристалле всегда с хорошей точностью. Это значит, что в цианиде хрома нтересующая нас тройка экстремальных эллипсов поля всегда практически сводится к паре эллипсов в одной плоскости (второй из которых олучается из первого поворотом на 90° и изменением направления обода) и прямой, перпендикулярной этой плоскости. Этого можно было, о-видимому, ожидать, так как расположение постоянного поля H_0 в лоскости симметрии (*ac* или *bc*) означает отклонение его всего на 6° плоскости двух магнитных осей (*yz* или *yx* соответственно), см. § 1.

Расчеты для других двух- и многокомплексных кристаллов (при пооянном магнитном поле в плоскости симметрии) более или менее аналочны проделанным. Так, например, в кристалле TiO_2 (рутиле) с присью Cr^{3+} [7] имеются два магнитных комплекса с общей осью z, повернуих один относительно другого вокруг этой оси на 90° (таким образом, $= \eta = 45°$), и полученные выше расчетные формулы с очевидными доизменениями применимы также и в этом случае.

В случае анизотропного g-фактора результаты остаются в силе, ли заменить всюду вектор спина $\vec{S}$ вектором магнитного момента $\vec{\mu}$, ставляющие которого μ_x, μ_y, μ_z по магнитным осям соответственно вны $g_x S_x$, $g_y S_y$, $g_z S_z$.

В заключение выражаю признательность М. Е. Жаботинскому за пооянный интерес к работе, а также Ч. М. Брискиной и В. Ф. Золину за омощь и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

E. O. Schulz-DuBois, Bell System Techn. J., 1959, 38, 1, 271.
E. O. Schulz-DuBois, H. E. D. Scovil, R. W. Degrasse, Bell System Techn. J., 1959, 38, 2, 335.
K. D. Bowers, J. Owen, Report Progr. Phys., 1955, 18, 304.
Е. Кондон, Успехи физ. наук, 1938, 19, 3, 380.
I. M. Baker, B. Bleaney, K. D. Bowers, Proc. Phys. Soc. B, 1956, 69, pt 12, 444, 1205.
Ч. М. Брискина, В. Ф. Золин, М. И. Родак, Сообщение на совещании по парамагнитному резонансу, Казань, 1959.
H. I. Gerritsen, S. E. Harrison, H. R. Lewis, I. P. Wittke, Phys. Rev. Letters, 1959, 2, 4, 153.

Поступила в редакцию
26 VII 1960

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РАСЧЕТ СОГЛАСУЮЩЕЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ВСТАВКИ В ВОЛНОВОДЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Ван Хуань-чжо

1. Два волновода круглого сечения с общей осью и различными радиусами соединены между собой коническим переходом. На переход падает волна H_{01}. Для уменьшения амплитуды возникающей волны H_{02} в переход вставлен концентрический металлический стержень переменного радиуса.

Волны типа H_{0n} в пространстве между двумя коаксиальными проводниками с постоянными радиусами a и b характеризуются продольной составляющей магнитного поля

$$H_z = \alpha^2 \; U\,(r, \;\theta)\; e^{i\,(\omega t - hz)}. \tag{1}$$

Величина $U\,(r,\,\theta)$ определяется из мембранного уравнения

$$\nabla^2 \; U + \alpha^2 \; U = 0, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 - h^2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \tag{3}$$

является корнем трансцендентного уравнения

$$J_1\,(\alpha a)\; N_1\,(\alpha b) - J_1\,(\alpha b)\; N_1\,(\alpha a) = 0. \tag{4}$$

Из (1) и (2) получим

$$H_z\,(a) = -\,\alpha^2 A\,\frac{2}{\pi\alpha a N_1\,(\alpha a)}, \tag{5}$$

$$H_z\,(b) = -\,\alpha^2 A\,\frac{2}{\pi\alpha b N_1\,(\alpha b)}. \tag{6}$$

Составляющие поля волны H_{01} имеют вид

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\,ik\alpha_1\,[A_1 J_1\,(\alpha_1 r) + B_1 N_1\,(\alpha_1 r)], \\ H_r &= ih_1\alpha_1\,[A_1 J_1\,(\alpha_1 r) + B_1 N_1\,(\alpha_1 r)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Из условия нормировки определим постоянную A_1 для волны H_{01}:

$$A_1 = \left[\frac{1}{\pi\alpha_1^2 F_1}\right]^{1/2}, \tag{8}$$

где

$$F_1 = \int_b^a \left[\frac{J_1\,(\alpha_1 r)\; N_1\,(\alpha_1 a) - J_1\,(\alpha_1 a)\; N_1\,(\alpha_1 r)}{N_1\,(\alpha_1 a)}\right]^2 r\,dr. \tag{9}$$

Аналогично определяются величины A_2 и F_2 для волны H_{02}.

Для того чтобы определить поле, нужно найти волновое число h. Найдя поля, мы сможем потом определить коэффициент связи между волнами H_{01} и H_{02} в коническом переходе.

Для отыскания зависимости волнового числа h от a в регулярном волноводе нужно решить уравнение (4). На рис. 1 и 2 представлена зависимость $h = f\,(a)$ в $мм^{-1}$ при различных значениях b для волн H_{01} и H_{02}. Графики вычислены для $\lambda = 8$ *мм*.

2. В симметричном волноводном переходе с металлической вставкой коэффициент связи между волнами H_{01} и H_{02} определяется формулой

$$S_{12} = \frac{\pi}{h_2\,(h_2 - h_1)}\left[a\,\frac{da}{dz}\,H_z'\,(a)\;H_z^2\,(a) + b\,\frac{db}{dz}\,H_z'\,(b)\;H_z^2\,(b)\right], \tag{10}$$

получаемой из формул (14), (16) в [1]. Здесь индексы 1 и 2 соответствуют волнам H_{01} и H_{02}.

При падении на переход волны H_{01} со стороны широкого волновода амплитуда паразитной волны H_{c2}, возникающей в переходе, выражается формулой

$$P = \int_0^L \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\, S_{12} e^{-i\int_0^z (h_1 - h_2)\, dz}\, dz, \qquad (11)$$

справедливой в отсутствие критического сечения для волны H_{02}.

Коэффициенты связи S_{ji} и S_{-ji}, которые связывают волны H_{01} и H_{02} обоих направлений, в волноводном переходе с компенсирующей вставкой обращаются в нуль одновременно. Поэтому если вблизи критического сечения обеспечено равенство нулю S_{ji},

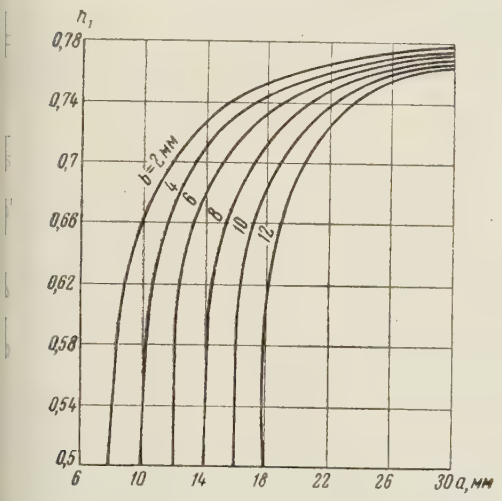


Рис. 1. Зависимость h_1 от a для волны H_{01}

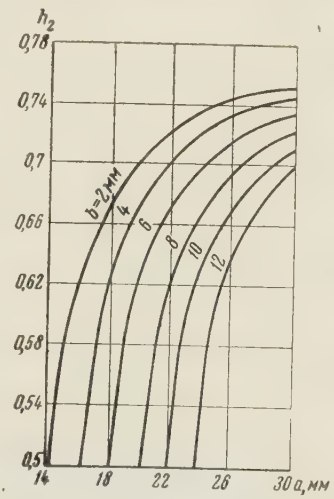


Рис. 2. Зависимость h_2 от a для волны H_{02}.

то будет равен нулю и S_{-ji}. При этом, как можно показать, вставка будет обеспечивать практическое отсутствие волны H_{02} также и в том случае, когда для этой волны есть критическое сечение.

3. Для широкополосного согласования передающих линий с разными волновыми сопротивлениями между ними включают переходные устройства, представляющие собой отрезки линий с переменными волновыми сопротивлениями. Известно, что коэффициент отражения R от участка линии с волновым сопротивлением $W(\xi)$ равен

$$R = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d \ln W(\xi)}{d\xi}\, e^{-i\sigma\xi}\, d\xi, \qquad (12)$$

где $\xi = z/L$ и параметр $\sigma = 2kL$ (L — длина участка).

Сравним (11) с (12). Положим, что при всех z суммарный коэффициент связи S_{12} изменяется так, что

$$\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\, S_{12}\, e^{-i\int_0^z (h_1 - h_2)\, dz}\, dz = D\, \frac{d \ln W(\xi)}{d\xi}\, e^{-i\sigma\xi}\, d\xi. \qquad (13)$$

Введем новую переменную ξ вместо z:

$$\xi = \frac{\int_0^z (h_1 - h_2)\, dz}{\int_0^L (h_1 - h_2)\, dz} = \frac{\int_0^z (h_1 - h_2)\, dz}{\sigma}, \qquad (14)$$

где через σ обозначен общий набег разности фаз:

$$\sigma = \int_0^L (h_1 - h_2)\, dz. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) принимает вид

$$\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\, S_{12}(\xi)\, dz = D\, \frac{d \ln W(\xi)}{d\xi}\, d\xi \tag{16}$$

и интеграл (11) становится тождественным с (12).

Положим, что изменение волнового сопротивления определяется функцией

$$\frac{d \ln W(\xi)}{d\xi} = \sin \pi\xi, \tag{17}$$

заимствованной нами из работы [2], посвященной уравнению (12).

Тогда из уравнений (16) и (17) коэффициент связи равен

$$S_{12}(\xi) = D \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \sin \pi\xi\, \frac{d\xi}{dz}. \tag{18}$$

Производная $d\xi / dz$ определяется формулой

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\sigma}(h_1 - h_2). \tag{19}$$

Функция (18) близка к оптимальной при $\sigma \geqslant 2{,}7\ \pi$.

4. Подставляя выражения (5) и (6) в (10) и используя соотношение (18), получим

$$\frac{A_1 A_2}{\pi h_2 (h_2 - h_1)} \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \left\{ \frac{1}{a}\, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{N_1(\alpha_1 a)\, N_1(\alpha_2 a)}\, \frac{da}{dz} + \frac{1}{b}\, \frac{\alpha_1 \alpha_2}{N_1(\alpha_1 b)\, N_1(\alpha_2 b)}\, \frac{db}{dz} \right\} = E \sin \pi\xi\, \frac{d\xi}{dz}, \tag{20}$$

где E — новая произвольная постоянная, определяемая дальше из дополнительных условий; метод определения ее проиллюстрирован ниже на численном примере. Определяем форму вставки $b(z)$ так, чтобы при $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ $S_{12}(\xi)$ определялся формулой (18). Тогда для $b(z)$ мы получаем дифференциальное уравнение (20). При $\xi = 1$ согласно (18) $S_{12} = 0$. При всех бо́льших z ($z > L$) мы потребуем, чтобы S_{12} также равнялся нулю. Это дает для $b(z)$ уравнение

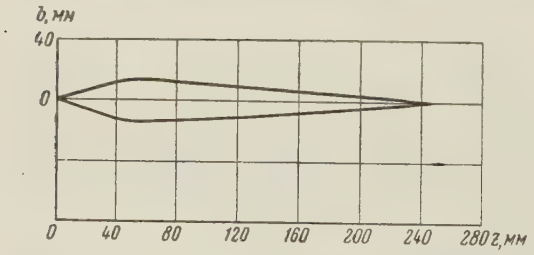


Рис. 3. Форма металлической вставки

$$a\, \frac{da}{dz}\, H_z^1(a)\, H_z^2(a) + b\, \frac{db}{dz}\, H_z^1(b)\, H_z^2(b) = 0. \tag{21}$$

Подставляя (5) и (6) в (21), получим

$$\frac{db}{dz} = -\frac{da}{dz}\, \frac{b}{a}\, \frac{N_1(\alpha_1 b)\, N_1(\alpha_2 b)}{N_1(\alpha_1 a)\, N_1(\alpha_2 a)}. \tag{22}$$

Для того чтобы определить начальную часть вставки, нужно найти значение db / dz при малых b, т. е. при условиях $b \ll a$, $kb \ll 1$. Из уравнения (20) при этом получим

$$\frac{db}{dz} = \frac{1{,}27\, E h_2 (h_2 - h_1)}{A_1 A_2 b \alpha_1^2 \alpha_2^2} \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \sin \pi\xi\, \frac{d\xi}{dz} + \frac{1}{1{,}23 a b \alpha_1 \alpha_2}\, \frac{da}{dz}. \tag{23}$$

Оказывается целесообразным начинать вставку в широком регулярном волноводе, где $da / dz = 0$. Будем отсчитывать z от точки, где $b = 0$. Тогда при малых b

$$b(z) = \left[\frac{E h_2 (h_2 - h_1)^3}{A_1 A_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \sigma^2} \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \right]^{1/2} z. \tag{24}$$

5. Приведем численный пример. Пусть волновод, радиус которого $a = 30$ *мм*, соединен конусом с волноводом, у которого $a = 6$ *мм*, величину da/dz положим равной —0,1; волна H_{01} падает со стороны широкого волновода. Определение $b(z)$ начинаем от точки $z = 0$ в широком регулярном волноводе. Сначала $b(z)$ вычисляется

по формуле (24), а потом по формуле (20) с учетом (19). Постоянные A_1 и A_2 мало изменяются при небольшом изменении a и b, поэтому возьмем $A_1 = 0{,}43$, $A_2 = 0{,}063$ — значения, которые получаются из формулы (8), если принять для a и b: $a = 18$ *мм* и $b = 6$ *мм*. Надо выбирать E и σ таким образом, чтобы при всех $0 < \xi < 1$ было $b > 0$ и чтобы во всем этом интервале значения a и b оставались такими, что сечение перехода оказывалось больше критического сечения для волны H_{02}. Кроме того, должно быть $\sigma \geqslant 2{,}7\,\pi$.

Вычислим несколько видов функции $b\,(z)$ при разных значениях E и σ. Выбираем $E = -1{,}5$, $\sigma = 3{,}2\,\pi$. В этом случае при $\xi = 1$, $z = 117{,}9$ *мм* получим $a = 21{,}1$ *мм*, $b = 8{,}2$ *мм*, т. е. имеем условия, при которых удовлетворяются все требования, положенные в основу расчета. При $z = 29$ *мм*, т. е. в начале конусного перехода, образующая вставка имеет излом, угол которого равен 7°50′.

При $z \geqslant 117{,}9$ *мм* $b\,(z)$ вычисляем по формуле (22) так, чтобы $S_{12} = 0$. При $z = 217{,}9$ *мм* получаем $a = 11{,}1$ *мм*, $b = 2{,}99$ *мм*. При этом значении z h_2 для волны H_{02} обращается в нуль (критическое сечение для этой волны). Наконец, при $z = 244$ *мм* получаем $a = 8{,}5$ *мм*, $b = 0$. На рис. 3 схематически представлена вычисленная форма металлической вставки.

Автор выражает благодарность Б. З. Каценеленбауму за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 7, 890.
2. J. Willis, N. Sihna, Proc. I. E. E., 1956, 103B, 8, 166.

Поступила в редакцию
16 XII 1960

О ТРЕБОВАНИЯХ К СТАБИЛЬНОСТИ АМПЛИТУД И ФАЗ ПОЛЕЙ В РЕЗОНАТОРАХ ЛИНЕЙНОГО УСКОРИТЕЛЯ

А. П. Федотов, В. А. Тепляков

При проектировании системы высокочастотного питания линейного ускорителя, состоящего из нескольких резонаторов, необходимо знать требования, предъявляемые к стабильности амплитуд и фаз полей в резонаторах ускорителя. Эти требования определяются в основном допустимыми потерями частиц на длине ускорителя. Нестабильность амплитуд и фаз полей нарушает устойчивость продольного движения частиц. Радиальное движение, как правило, слабее зависит от нестабильности высокочастотного поля, а при некоторых способах фокусировки (например продольным магнитным полем) практически вовсе не зависит.

В литературе нам известна лишь одна работа [1], посвященная этому вопросу. В ней рассчитаны потери частиц в ускорителе, состоящем из нескольких десятков резонаторов, в предположении статистического разброса фаз полей в них относительно программных значений. Каждый резонатор имеет лишь один ускоряющий зазор. Расчет показывает, что при разбросе фаз полей в 5° при синхронной фазе * $\varphi_c = 20°$ и разбросе амплитуд полей в 1—1,5% потерей частиц в ускорителе практически можно пренебречь. Такие «мягкие» требования к стабильности фаз и амплитуд полей объясняются тем, что действие поля одного ускоряющего зазора на частицы мало, вследствие чего статистические отклонения фаз от программных значений в отдельных резонаторах компенсируют друг друга и частицы не теряют фазовой устойчивости.

Для практики более характерны ускорители, которые состоят из нескольких «длинных» ** резонаторов (см., например, [2]). В таких ускорителях требования к стабильности амплитуд и фаз полей более жесткие. Здесь ошибка, например, фазы поля в одном длинном резонаторе не может быть скомпенсирована ошибкой фазы поля противоположного знака в последующем длинном резонаторе, так как в длинном резонаторе частицы, не захваченные в область устойчивого ускорения, безвозвратно выбывают из процесса ускорения [3, 4]. Для таких ускорителей зависимость потерь частиц от смещения амплитуд и фаз полей в резонаторах (от программных значений) можно оценить, рассматривая область устойчивого ускорения частиц в резонаторах ускорителя [3, 4].

Рассмотрим вначале один длинный резонатор; в него поступают сгустки ускоренных частиц, состояния которых в фазовой плоскости равномерно заполняют всю область устойчивого ускорения. При изменении амплитуды и фазы поля в резонаторе эта область устойчивого ускорения деформируется и смещается, и часть частиц ока-

* При фазе $\varphi = 0$ ускорение частицы максимально.

** В длинном резонаторе частицы совершают более периода фазовых (продольных) колебаний. Такой резонатор имеет несколько ускоряющих зазоров.

зывается вне области устойчивого ускорения. Обозначим через $\varkappa$ отношение тока ускоренных частиц в возмущенном режиме к току ускоренных частиц в расчетном режиме. При расчетной фазе поля в резонаторе коэффициент $\varkappa$ остается равным единице при увеличении амплитуды поля u от расчетного значения u_0, которому соответствует синхронная фаза φ_{c0}. При уменьшении u от значения u_0 до $u_0 \cos \varphi_{c0}$ [4]

$$\varkappa \simeq 1 - \frac{1}{1 - \cos \varphi_{c0}} \cdot \frac{\Delta u}{u_0}, \qquad (1)$$

где $\Delta u = u_0 - u$. При $u \leqslant u_0 \cos \varphi_{c0}$ ускорение становится невозможным. Можно показать также, что при постоянной амплитуде поля зависимость $\varkappa$ от смещения фазы поля относительно программной $\Delta\varphi$ (в пределах $\pm 3\,\varphi_{c0}$) такова:

$$\varkappa \simeq 1 - \left| \frac{\Delta\varphi}{3\varphi_{c0}} \right|. \qquad (2)$$

Найдем теперь потери частиц в N длинных резонаторах ускорителя с одинаковыми областями устойчивого ускорения при случайных изменениях фаз полей в них. Пусть амплитуды полей будут расчетными. Тогда, используя (2), получим суммарные потери частиц в N резонаторах:

$$1 - \varkappa_N = \frac{\sqrt{N}}{3} \frac{\Delta\varphi}{\varphi_{c0}}. \qquad (3)$$

Здесь $\varkappa_N$ — коэффициент для всех N резонаторов.

Допуск на амплитуду поля определяется из условия эквивалентности $\Delta u/u$ и $\Delta\varphi/\varphi_{c0}$ (с точки зрения потерь), которое находится из приравнивания $\varkappa$ в выражениях (1) и (2):

$$\frac{\Delta u}{u_0} = \frac{1 - \cos \varphi_{c0}}{3} \frac{\Delta\varphi}{\varphi_{c0}}. \qquad (4)$$

При этом полный допуск целесообразным образом распределяется между $\Delta u/u_0$ и $\Delta\varphi/\varphi_{c0}$.

Например, для трех длинных резонаторов линейного ускорителя с $\varphi_c = 30°$, задавшись величиной потерь 20%, из (3) получим полный допуск $\Delta\varphi/\varphi_{c0} = 0{,}35$, который в соответствии с (4) можно распределить так: $\Delta u/u_0 = 1\%$ и $\Delta\varphi \simeq 4°$.

Полученные допуски минимальны, потому что было предположено равномерное распределение состояния частиц в области устойчивого ускорения. На самом деле, с увеличением скорости ускоряемых частиц «плотность» их состояний у краев области устойчивого ускорения становится меньше, чем в центре. Указанные допуски обеспечивают требуемый захват частиц в ускорителе.

Авторы благодарны Б. К. Шембелю за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Зельманов, А. С. Компанеец, Статистический разброс фаз в системе независимых резонаторов, Отчет ИХФ АН СССР, 1953.
2. J. H. Williams a oth, Rev. Scient. Instrum., 1958, 29, 6.
3. Б. К. Шембель, В. А. Тепляков, А. П. Федотов, Л. М. Прокунин, А. Д. Гришина, Вопросы расчета линейного ускорителя тяжелых частиц, Докл. на конференции по ускорителям заряженных частиц, Москва, 1954.
4. А. П. Федотов, Б. К. Шембель, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 108.

Поступила в редакцию
21 XI 1960

О ВОЗБУЖДЕНИИ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК ПРИ ФЕРРОРЕЗОНАНСЕ

В. Н. Фетина

Вопрос о возбуждении высших гармонических колебаний в электрическом колебательном контуре, содержащем нелинейную реактивность в виде индуктивности и находящемся под действием гармонического напряжения, рассмотрен рядом авторов [1—6]. В работах [2, 3] показано, что среди возможных гармонических составляющих колебаний, возбуждаемых в системе, имеющей симметричную и однозначную характеристику вида

$$F(x) = \alpha x + \beta x^3, \tag{1}$$

могут быть и колебания четного порядка, в частности частоты 2ω. Интересны некоторые выводы [3] относительно этого колебания, которые сводятся к следующему.

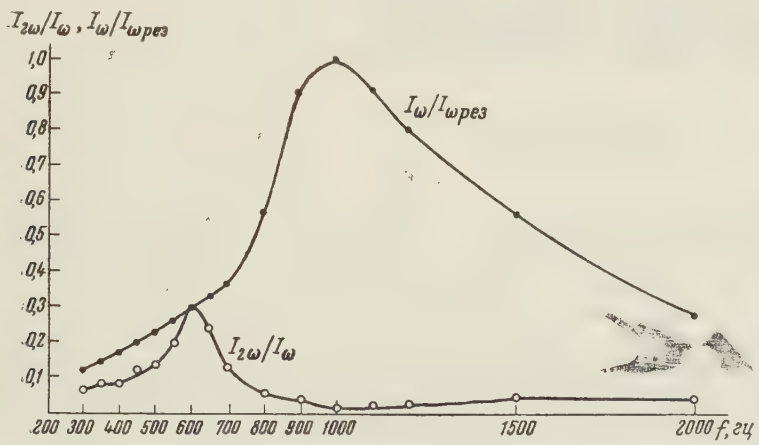


Рис. 1. Резонансные характеристики нелинейного колебательного контура на основной частоте и второй гармонике

1) Колебания со значительной второй гармоникой существуют в определенной узкой области частот; вне этой области вторая гармоника совершенно отсутствует.

2) Область со значительной второй гармоникой соответствует довольно низким частотам возмущающей силы (несколько более $\frac{1}{2}\omega$). Вблизи этой частоты наступает резонанс второй гармоники.

Вопрос об устойчивости таких колебаний авторами [2, 3] не рассматривался, и поэтому не было достаточных оснований полагать, что подобные колебания действительно могут существовать.

Устойчивость высших гармонических колебаний исследована в работе [4]. Автор ее пренебрегает затуханием в системе, поэтому его вывод об устойчивости колебания частоты 2ω при очень больших амплитудах внешнего воздействия нельзя считать достоверным.

С другой стороны, в работе [5] доказывается, что при однозначной и симметричной нелинейной характеристике вида (1) колебания четной гармоники 2ω в диссипативном контуре не являются устойчивыми.

Тем не менее, в нелинейном колебательном контуре гармонические составляющие четного порядка неоднократно наблюдались экспериментально [1, 4, 5]. Впервые о них упомянуто в работе [1]. Не касаясь возможных причин возбуждения этих колебаний, автор назвал их аномальными.

Попытка дать теоретическое объяснение существованию обнаруженной второй гармоники сделана в работе [2]. В работе [5] высказано предположение, что причина возникновения четной гармоники в реальном электрическом контуре связана с неоднозначным (гистерезисным) характером кривой намагничивания. Однако ясного физического представления о механизме возбуждения высших гармонических колебаний четного порядка в литературе до сих пор не имеется.

Результаты нашего экспериментального исследования позволяют сделать некоторые замечания относительно механизма возбуждения высших четных гармоник. Среди вынужденных колебаний, возбуждаемых в нелинейном электрическом колеба-

тельном контуре, потенциально возможны высшие гармонические колебания четного порядка. Однако при однозначной и симметричной характеристике нелинейности эти колебания следует считать неустойчивыми. Это же замечание справедливо и для двузначной (гистерезисной) симметричной характеристики реального нелинейного элемента. Иначе обстоит дело, если эта симметрия нарушается по той или иной причине. Тогда в токе контура появляется четная составляющая и в области, предсказанной теорией [3], наступает ее резонанс. Подобное нарушение симметрии возможно за счет неидеальной синусоидальности напряжения, питающего колебательный контур. В результате этого нарушается идентичность восходящей и нисходящей ветвей перемагничивания, и в контуре в определенной области частот, при любой амплитуде внешнего воздействия, возникает резонанс второй гармоники.

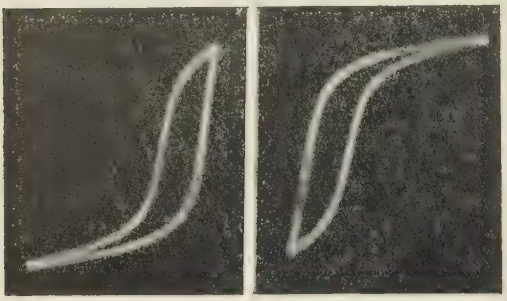


Рис. 2. Петли перемагничивания при возбуждении в контуре второй гармоники (*а*, *б* — различные начальные фазы)

При наблюдении этого явления могут быть получены кривые, показанные на рис. 1. Область возбуждения гармоники 2ω и ее резонансное значение находятся в соответствии с выводами, сделанными в работе [3] и приведенными выше.

Если скомпенсировать асимметрию петли перемагничивания введением небольшого постоянного смещения соответствующего знака или питать контур сигналом более правильной синусоидальной формы, то при тех же условиях и параметрах контура резонанс второй гармоники не возникает. Однако он снова появляется при больших амплитудах внешнего напряжения, причем колебания четной составляющей 2ω становятся значительными по амплитуде, а их фаза определяется случайными начальными условиями (рис. 2). В этом случае устойчивость высших гармонических составляющих четного порядка, наблюдаемых при достаточно больших амплитудах внешнего напряжения, по-видимому, обусловлена нарушением симметрии петли перемагничивания за счет переходного процесса в начальный период установления, когда изменение магнитного состояния сердечника проходит по частным кривым однократного намагничивания.

Другой возможной причиной устойчивости может быть наличие в контуре с ферромагнитным сердечником переменного эквивалентного сопротивления потерь, которое, как показывает эксперимент, в определенной области частот (меньших $\omega_{рез}$) линейно возрастает с ростом намагничивающего поля. Это может вызвать появление четных гармоник и привести к их резонансу.

Приведенные соображения, естественно, являются предварительными и требуют дальнейшего более детального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Rouelle, Contribution à l'ètude expèrimentale de la ferro-rèsonance, Rev. gén. électr., 1934, 36, 21, 778.
2. С. П. Пивоваров, Высшие гармоники в электрической цепи, содержащей индуктивность и емкость, Электричество, 1949, 8, 38.
3. А. М. Кац, Бигармонические колебания диссипативной нелинейной системы, вызываемые или поддерживаемые гармонической возмущающей силой, Прикл. матем. и механ., 1954, 18, 4, 425.
4. Т. Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, перев. с англ. под ред. А. И. Лурье, ИЛ, 1957.
5. М. Д. Карасев, А. М. Сухов, О четных гармониках в нелинейном колебательном контуре с нечетной нелинейностью, Вестн. Моск. ун-та, Сер. математики, механики, астрономии, физики, химии, 1959, 4, 123.
6. Г. Р. Рахимов, Феррорезонанс, Изд. АН УзССР, 1957.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова
Кафедра теории колебаний

Поступило в редакцию
9 III 1961

ФОТОЭФФЕКТ В ОБЛАСТИ МЯГКИХ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

Н. Г. Находкин, П. В. Мельник

Для интерпретации кривых распределения фотоэлектронов по скоростям (вырываемых светом с энергией квантов в области вакуумного ультрафиолета) некоторые авторы [1] используют представления о рассеянии энергии возбуждаемыми фотоэлектронами при их движении внутри твердых тел к поверхности. Характер движения этих электронов должен быть близким к характеру движения возбужденных вторичных электронов [2]. Однако в области энергий квантов сотен и нескольких тысяч электроновольт, где должно наблюдаться наибольшее сходство между фотоэффектом и вторичной эмиссией, соответствующие экспериментальные работы нам неизвестны *. Поэтому мы попытались определить зависимость фототока от толщины слоя как металла, так и неметалла. Эти зависимости, так же, как и в случае вторичной эмиссии, должны характеризовать кинетику движения возбужденных электронов.

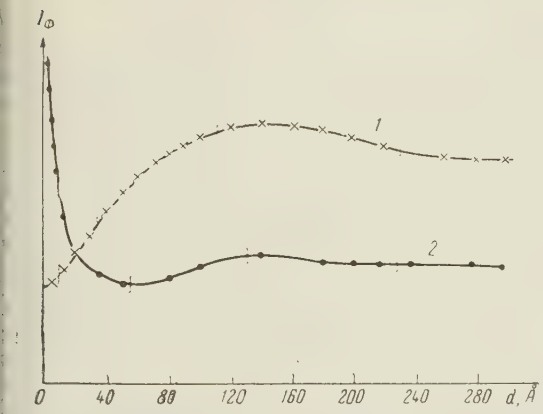


Рис. 1. Зависимость фототока в относительных единицах от толщины исследуемого слоя: *1* — слой KCl на золотой подложке; *2* — слой золота на подложке KCl

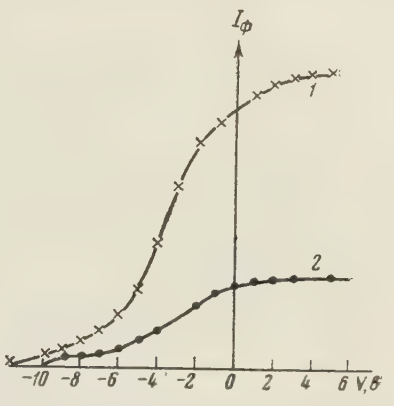


Рис. 2. Вольтамперные кривые фототока в задерживающем поле: *1* — для слоя KCl; *2* — для слоя золота

Для исследований был выбран метод клина, предложенный Моргулисом [3]. Источником излучений служили рентгеновская трубка и изогнутый кристалл слюды, настроенный на энергию квантов, примерно равную 1 *кэв*, помещенные в тот же вакуумный объем, что и исследуемый клин. Объектами исследований были выбраны следующие две системы: золотой клин на подложке из KCl и клин KCl на золотой подложке. Измеряемые малые токи и достаточная проводимость сравнительно тонких диэлектрических слоев KCl не создавали заметной зарядки этих слоев.

На рис. 1 приведены экспериментальные кривые изменения фототока с ростом толщин слоя KCl (кривая *1*) и слоя золота (кривая *2*). Эти кривые качественно очень похожи на толщинные кривые вторичной эмиссии для случаев тяжелого вещества на легком и легкого вещества на тяжелом, которые подробно исследовались в наших работах по вторичной эмиссии [4]. Вид экспериментальных кривых трудно связать с изменением условий поглощения квантов вдоль слоя, так как для данных длин волн и нормальных углов падения коэффициенты отражения равны нулю, коэффициенты поглощения не очень велики [5], и заметное ослабление радиации (в e раз) наступает поэтому при толщинах, бóльших, чем необходимые для исследований. Поэтому можно допустить, что поглощение радиации во всей толще исследуемых слоев в первом приближении равномерно. В результате поглощения квантов рентгеновских лучей в исследуемом объеме вещества образуются быстрые электроны, вероятность образования которых больше, чем медленных [5]. Быстрые электроны, двигаясь в веществе, постепенно теряют свою энергию и образуют медленные электроны, часть которых дает основной вклад в измеряемый фототок. Преобладание медленных фотоэлектронов можно обнаружить на соответствующих вольтамперных кривых задержки, измерен-

---

* После того как наша работа была закончена, в печати появилась статья М. А. Румша, А. П. Лукирского и В. Н. Шмелева (Докл. АН СССР, 1960, 135, 55), в которой исследовались зависимости фототока металлов от угла падения квантов (θ) для длин волн 1,39—13,9 Å. Авторам удалось интерпретировать угловую зависимость фототока, допустив, что выход возбужденных электронов пропорционален $e^{-\frac{\alpha x}{\cos\theta}}$, как это делается в элементарных теориях вторичной эмиссии.

ных для слоя KCl (кривая *1* на рис. 2) и для слоя золота (кривая *2* на том же рисунке); эти кривые подобны аналогичным кривым в случае вторичной эмиссии.

Таким образом, качественное сходство толщинных кривых вторичной эмиссии при энергиях первичных электронов порядка 1000 *эв* и фотоэффекта при энергиях квантов порядка 1000 *эв* неслучайно, так как условия движения быстрых и медленных электронов в этих двух явлениях должны быть подобными. Поэтому фотоэлектронная эмиссия при сравнительно больших энергиях квантов имеет много общих черт со вторичной эмиссией; при тех же энергиях первичных электронов и, так же как и вторичная эмиссия, является явлением объемным.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. И. Лукирский, Z. Phys., 1924, **22**, 351; Philos. Mag., 1924, **47**, 266; J. Dickey, Phys. Rev., 1951, **81**, 612; L. Apker, E. Taft, J. Dickey, J. Opt. Soc. America, 1953, **43**, 78; H. Hintereggger, Phys. Rev., 1954, **96**, 538; W. Walker, G. Weissler, Phys. Rev., 1955, **97**, 1178; S. Methfessel, Z. Phys., 1957, **147**, 442, E. Rudberg, Proc. Roy. Soc. A, 1928, **120**, 385.
2. С. И. Пекар, Тр. Совещания по катодной электронике, Киев, 1952, стр. 223—224; H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. B, 1955, **68**, 657.
3. Н. Д. Моргулис, Доповіді січневої сесії АН УРСР 1942, **2**, 215.
4. Н. Г. Находкин, В. А. Романовский, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1958, **22**, 448; Укр. фіз. ж., 1959, **4**, 769; Радиотехника и электроника, 1960, **8**, 1275.
5. Handbook of chemistry and physics, 1955—1956, 37 ed., p. 2405; H. Robinson, Proc. Roy. Soc. A, 1923, **104**, 455; А. Базин, ЖЭТФ, 1944, **14**, 23.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило в редакцию
7 II 1961

1961 № 7

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Л. П. КУКЛЕВА И Ю. П. ОЗЕРСКОГО «СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ДЕКОДИРОВАНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ КОДОВ»

Из текста статьи [1] можно заключить, что поставленная задача декодирования интервальных кодов эквивалентна задаче обнаружения n-импульсного сигнала в шумах, когда принимается решение лишь о его наличии или отсутствии. В статье предполагается, что обработка производится на выходе детектора огибающей и что помехи на входе детектора гауссовые. Производится сравнение помехоустойчивости двух методов обработки: а) метода совпадений по критерию n из n, б) метода суммирований в обоих случаях для нефлуктуирующих сигналов и для сигналов с независимыми флуктуациями амплитуды по закону Релея.

Оценка помехоустойчивости производилась по критерию суммарной ошибки, которую авторы называют ошибкой декодирования,

$$p = 0{,}5\,(1 - \beta_n + \alpha_n),$$

где β_n — вероятность декодирования n-импульсной кодовой группы при наличии помехи; α_n — вероятность ложного декодирования.

Этот критерий является частным случаем критерия идеального наблюдателя [2]. Известно [2], что в этом случае (как и во многих других) оптимальной обработкой является обработка по алгоритму коэффициента правдоподобия, который для рассматриваемых в статье случаев состоит в следующем.

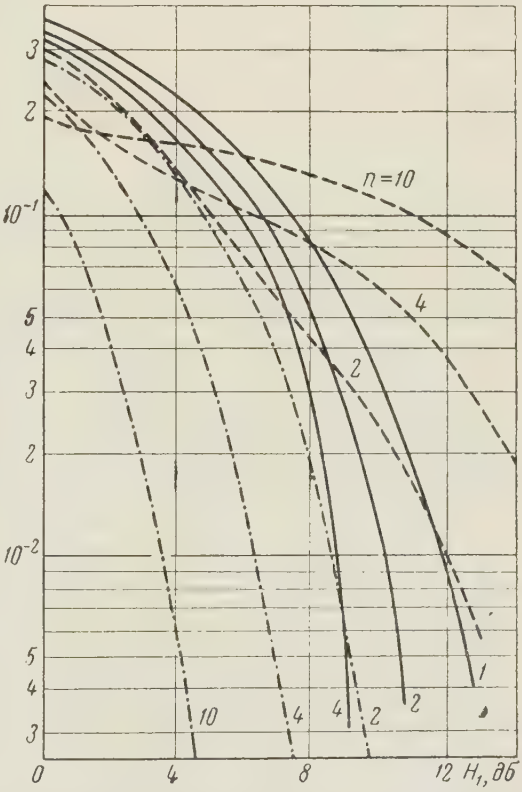


Рис. 1. Зависимость ошибки декодирования от отношения мощности сигнала к мощности помехи на входе детектора для нефлуктуирующего сигнала:
сплошные кривые — метод совпадений; пунктир — метод суммирований (то и другое — результаты [1]); штрих-пунктир — метод суммирований с оптимальным порогом

а) Для нефлуктуирующих сигналов суммирование производится с предварительным функциональным преобразованием слагаемых по закону

$$y = \ln I_0\left(\frac{EE_c}{\sigma^2}\right),$$

где E — огибающая сигнала и помехи; E_c — амплитуда сигнала; σ^2 — дисперсия помехи на входе детектора. Этот закон в случае слабых сигналов вырождается в квадратичный а в случае сильных — в линейный.

б) Для сигналов с независимыми флуктуациями импульсов, составляющих пачку, суммирование производится с предварительным возведением слагаемых в квадрат.

Учитывая характер оптимальной обработки, интуитивно ясно, что метод суммирований без предварительных нелинейных преобразований (который исследуют авторы статьи [1]) будет иметь более высокую помехоустойчивость, чем метод совпадений. Однако метод совпадений в отдельных случаях может оказаться более легко технически реализуемым и кроме того он (как правильно отмечают авторы [1]) исключает возможность срабатывания от одиночных случайных импульсов большой амплитуды. Поэтому сравнение помехоустойчивости этих методов, вообще говоря, полезно.

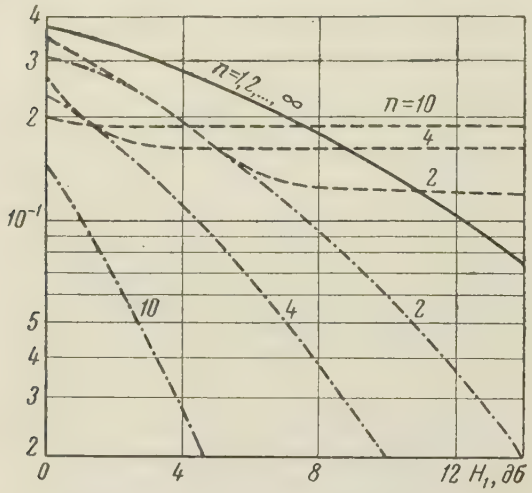


Рис. 2. Зависимость ошибки декодирования от отношения мощности сигнала к мощности помехи на входе детектора для флуктуирующего сигнала:

сплошные линии — метод совпадений; пунктир — метод суммирований (то и другое — результаты [1]); штрих-пунктир — метод суммирований с оптимальным порогом

Однако это сравнение должно проводиться только при том условии, что порог срабатывания в каждом методе выбирается оптимальным, т. е. обеспечивающим наименьшую суммарную ошибку. Величина порога зависит от отношения сигнал/помеха, что, кстати сказать, порождает сомнение о возможности применения критерия идеального наблюдателя на практике.

Тем не менее в [1] оптимальная величина порога используется только при исследовании метода совпадений. Авторы пишут: «... необходимость декодирования n-импульсной посылки *исключает возможность* установления на выходе сумматора оптимального уровня ограничения», т. е. порога срабатывания (курсив наш).

В случае обнаружения задача установления оптимального порога срабатывания совершенно аналогична в обоих методах обработки и технически решается в обоих случаях одинаково легко или трудно. Авторы [1] пишут, что при методе суммирований «...уровень амплитудного ограничения устанавливается таким, чтобы его превышала *только сумма n импульсов*» (курсив наш).

Это условие неясно, так как оно выполнимо только в отсутствие помех и при нефлуктуирующих сигналах.

Однако при численных расчетах характеристик метода суммирований без каких-либо пояснений принимается величина порога, равная в обозначениях [1]

$$x_0 = (n - 0{,}5)\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + k_{\text{п}=}x_{\text{с}}\right)$$

для нефлуктуирующего сигнала и

$$x_0'' = (n - 0{,}5)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + h^2}$$

для флуктуирующего сигнала.

Использование неоптимального порога при исследовании метода суммирований естественно приводит к тому, что помехоустойчивость этого метода оказывается ниже, чем метода совпадений, в котором используется оптимальный порог, а в случае флуктуирующих сигналов — даже уменьшается с увеличением числа суммирований.

На основании полученных таким образом результатов авторы [1] делают «*...общий вывод* о преимуществах метода совпадений по сравнению с методом суммирований в тех наиболее важных случаях, когда требуется малая ошибка декодирования» (курсив наш).

Нами были проделаны расчеты характеристик метода суммирований при использовании оптимального порога. Как и в [1], в этом случае использовалась нормальная аппроксимация. Кривые, построенные по результатам расчетов, нанесены на графики, заимствованные из [1] (рис. 1, 2).

Как и следовало ожидать, при оптимальном пороге метод суммирований всегда имеет бо́льшую помехоустойчивость, чем метод совпадений.

Таким образом, общий вывод авторов [1] о большей помехоустойчивости метода совпадений по сравнению с методом суммирований в той постановке задачи, которая следует из текста их работы, неверен и может ввести в заблуждение читателя. Полную ясность в данный вопрос могло бы внести разъяснение авторов о тех соображениях, которыми они руководствовались при выборе порога в методе суммирований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Куклев, Ю. П. Озерский, Сравнение двух методов декодирования интервальных кодов, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 6, 894.
2. В. Питерсон, Т. Бердсал, В. Фокс, Теория обнаружения сигналов, Сб. Теория информации и ее приложения, перев. с англ. под ред. А. А. Харкевича, ГИФМЛ, 1959, 220.

И. М. Петров, Г. С. Тысяцкий

Поступило в редакцию
27 XII 1960

ОТВЕТ НА ПИСЬМО И. М. ПЕТРОВА И Г. С. ТЫСЯЦКОГО

Целью нашей статьи являлось сравнение помехоустойчивости методов суммирований и совпадений при использовании их для декодирования сигналов, передаваемых интервальным кодом. Интервальное кодирование заключается в передаче сообщений в виде групп из n одинаковых импульсов, отличающихся интервалами между ними. При этом могут существовать комбинации, не совпадающие друг с другом лишь по величине одного из таких интервалов.

В статье рассмотрен случай обработки сигнала для выделения заданного кода на фоне флуктуационной помехи и других кодовых комбинаций. Это составляет задачу декодирования сигнала.

Необходимость различения кодовых комбинаций, не совпадающих лишь по величине одного интервала (так называемых соседних кодов), заставляет выбирать порог ограничения при методе суммирований так, чтобы его превышала сумма n импульсов, но не превышала сумма n — 1 импульсов. Такой выбор порога создает для обоих методов равные условия в том смысле, что пропадание любого из импульсов посылки приводит к потере сигнала. Срабатывание декодирующего устройства лишь при n-кратном совпадении обеспечивает также максимальную устойчивость интервальных кодов по отношению к хаотической импульсной помехе, для борьбы с которой они часто и используются.

В отсутствие помех надежность работы декодирующего устройства, построенного по методу суммирований, определяется стабильностью амплитуды сигнальных импульсов и порога ограничения. Поэтому для получения максимальной надежности декодирования без помех порог естественно установить на середине n-й ступеньки суммарного импульса:

$$U_0 = (n - 0{,}5)\, U_m, \tag{1}$$

где U_0 — значение порога; U_m — амплитуда импульса в группе. При наличии флуктуационной помехи порог ограничения для метода суммирований в соответствии с (1) следует положить равным

$$U_c = (n - 0{,}5)\, U_{mcp}, \tag{2}$$

где U_{mcp} — среднее значение сигнала и помехи на выходе детектора.

Такое значение порога может не совпадать с оптимальным значением порога, выбранным по критерию идеального наблюдателя, обеспечивающим максимальную вероятность обнаружения кода, т. е. выделение данного кода на фоне только флуктуационной помехи. Поэтому совершенно естественно, что результаты расчета авторов статьи, использующих порог (2), и авторов письма, использовавших порог, оптимальный по обнаружению, не совпадают друг с другом. Вывод авторов письма о преимуществе метода суммирований с оптимальным порогом при о б н а р у ж е н и и кодовой посылки, конечно, не вызывает сомнений. Одновременно остается справедливым и вывод авторов статьи о том, что при д е к о д и р о в а н и и n-импульсного интервального кода метод совпадений при малых ошибках дает лучшие результаты.

Мы разделяем сомнение авторов письма о возможности применения критерия идеального наблюдателя на практике, вызванное тем, что величина оптимального порога зависит от соотношения сигнал/помеха. Однако следует отметить, что в тех случаях, когда соотношение сигнал/помеха неизвестно, метод совпадений может быть использован для декодирования сигнала, тогда как применение метода суммирований, основанного на знании указанного соотношения, невозможно. Это дает еще одно преимущество методу совпадений.

Причинами возражений, изложенных И. М. Петровым и Г. С. Тысяцким в их письме, являются, во-первых, недостаточная четкость в постановке рассматриваемой нами задачи, в силу чего авторы письма предположили, что решается задача обнаружения n-импульсного сигнала, а не его декодирования. Отсюда последовали сомнения в правильности выбора порога ограничения для метода суммирований. Во-вторых, авторы статьи при расчете ошибки декодирования оценили лишь две составляющие этой ошибки, а именно, составляющую от пропаданий сигнала и составляющую от ложного прохождения помехи. Это также могло навести на мысль о задаче обнаружения сигнала.

В общем случае ошибка декодирования имеет еще одну составляющую, учитывающую ложные прохождения других кодовых групп.

Полная ошибка декодирования равна

$$p = P_c(1-\beta_n) + P_ш\alpha_n + \sum_{i=1}^{N-1} P_i\gamma_i, \quad (3)$$

Таблица 1

Метод суммирований

H_1, дб	6	10	14	—
x_c	2,83	4,45	7,1	n
p	0,25 0,26	0,14 0,18	0,03 0,07	2 4

где P_c, $P_ш$ и P_i — априорные вероятности сигнального кода, чистого шума и i-го кода, либо коэффициенты веса соответствующих ошибок; β_n — вероятность правильного декодирования сигнального кода; α_n — вероятность ложного декодирования шума; γ_i — вероятность ложного декодирования i-го кода; N — полное число кодов.

Выражение (3) показывает, что результат сравнения может зависеть от выбора кодов и распределения их априорных вероятностей.

По совету Б. С. Флейшмана авторы статьи оценили влияние наиболее вероятной составляющей ошибки от ложного прохождения других кодов, т. е. ошибки от приема соседнего кода. Мы рассмотрели частный случай равновероятного поступления на вход приемника сигнала, чистого шума и соседнего кода. При этом

$$p = \frac{1}{3}(1-\beta_n+\alpha_n+\gamma_1). \quad (4)$$

При методе суммирований вероятность γ_1 равна вероятности превышения порога (2) суммой из $n-1$ выборки сигнала с шумом и одной выборки чистого шума. При использовании обозначений статьи она равна

$$\gamma_1 = 0{,}5 - \Phi\left[\frac{0{,}5\,x_c k_{п=} - 1{,}25}{\sqrt{(n-1)k_{пп}^2 + 0{,}43}}\right].$$

При методе совпадений вероятность γ_1 для сильных сигналов примерно равна вероятности α превышения порога чистым шумом, поэтому здесь

$$p = \frac{1}{3}(1-\beta^n+\alpha^n+\alpha).$$

Значение оптимального порога $x_{опт}$ для метода совпадений можно найти из условия $\partial p/\partial x_0 = 0$, которое в случае сигнала постоянной амплитуды приводит к следующему приближенному выражению для вычисления оптимального по декодированию порога:

$$x_{опт} \simeq \frac{x_c}{2} - \frac{1}{x_c}\ln\left[\frac{n}{\sqrt{\pi(x_c^2 - 2\ln n)}}\right]. \quad (5)$$

Результаты расчета для обоих методов приведены в табл. 1 и 2.

Сравнение табл. 1 и 2 показывают, что и при учете наиболее вероятной ошибки от соседнего кода метод совпадений по-прежнему сохраняет преимущество перед методом суммирований.

Таблица 2

Метод совпадений

H_1, дб	6	10	14	n
$x_{опт}$	1,7 1,42	2,51 2,35	3,81 3,71	2 4
p	0,16 0,19	0,032 0,044	0,0006 0,0008	2 4

Таблица 3

Вероятность ошибки

	H_1, дб	6	10	14	n
γ_1	Метод суммирований	0,62 0,58	0,38 0,43	0,08 0,18	2 4
	Метод совпадений	0,24 0,36	0,043 0,063	0,0007 0,001	2 4

В табл. 3 приведены значения вероятности ошибки от соседнего кода для обоих методов, из которой видно, что составляющая ошибки меньше при методе совпадений.

В заключение мы хотим отметить, что дополнительные расчеты, проведенные авторами письма, позволяют совместно с данными статьи сравнить эффективность использования методов суммирований и совпадений для задачи обнаружения n-импульсного сигнала. Эти расчеты могут также представлять интерес при рассмотрении кодов с несовпадающими интервалами, когда выбор порога ограничения для метода суммирований не связан с защитой от соседних кодов.

Мы считаем критику, содержащуюся в письме И. М. Петрова и Г. С. Тысляцкого, полезной, так как она выявила недостатки нашей статьи и способствовала более подробному освещению поднятого в ней вопроса.

Выражаем признательность Б. С. Флейшману за ряд полезных советов.

Л. П. Куклев, Ю. П. Озерский

Поступило в редакцию
13 II 1961

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ПОЛЯРИЗАЦИИ СВЕТА НА ФОТОЭФФЕКТ СЛОЖНЫХ КАТОДОВ

В статье Герлиха и Хора [1] описана впервые наблюдавшаяся ими особенность фотоэмиссии тонкого полупрозрачного Sb — Cs-фотокатода, работающего при обратном освещении. Эта особенность состоит в том, что отдача такого катода в указанных условиях освещения обнаруживает зависимость квантового выхода от состояния поляризации света, обратную установленной для фотоэмиссии в случае металлических катодов [2]: большая отдача соответствует ориентации электрического вектора перпендикулярно плоскости падения луча (т. е. параллельно поверхности катода).

Истолкования этого результата авторы не дают и отчетливо высказывают лишь одно предположение, что в случае Sb — Cs-катода «...должно существовать предпочтительное направление фотоэлектрических процессов возбуждения перпендикулярно электрическому вектору» (которое представляется нам весьма искусственным).

В связи с этим мы хотим указать, что, по нашему мнению, этот новый факт представляет собой непосредственное подтверждение истинности необычного характера распределения фотоэлектронов, испускаемых тонким Sb — Cs-катодом при обратном освещении по углам вылета, установленного нами [3], если принять, как обычно, что вырывание фотоэлектронов происходит в направлении колебаний электрического вектора $\vec{E}$. Действительно, при работе с неполяризованным светом при нормальном падении (наши опыты) электрический вектор всегда параллелен поверхности и существование максимального выхода электронов в направлении $\vec{E}$ должно проявляться в вылете электронов преимущественно под большими углами к нормали. Согласие между нашими результатами и данными Герлиха и Хора идет, однако, еще дальше. В обоих случаях обнаруживается одинаковая зависимость от спектрального состава света: эффект уменьшается с ростом частоты. Поэтому мы полагаем, что оба эффекта являются выражением одной и той же особенности фотоэмиссии Sb — Cs-слоев — преобладания вырывания фотоэлектронов в толще слоя под значительными углами к нормали во всем видимом участке спектра. Этот угол мы оценили в соответствии с предложенной нами энергетической схемой Sb — Cs-катода, как равный $\sim 25°$.

Для детальной интерпретации обоих эффектов не имеется достаточных экспериментальных данных. Так, в наших опытах влияние поляризации света вообще не исследовалось, но было показано, что наблюдаемый характер углового распределения присущ только случаю обратного освещения. В опытах Герлиха и Хора не исследовался случай прямого освещения. Однако мы полагаем, что в качестве первого шага в этом направлении следует принять уже высказанное нами допущение о том, что преимущественным направлением вырывания является направление колебаний вектора $\vec{E}$. Это позволяет не только объяснить (феноменологически) оба рассматриваемые эффекта одной и той же причиной, но и не искать нового объяснения векторной селективности фотоэмиссии вообще.

Что касается механизма, обусловливающего такую угловую селективность фотоэмиссии в случае Sb — Cs-катода, то он может быть двоякого рода. Одной причиной может быть существование энергетически наиболее выгодного направления вырывания фотоэлектронов в толще слоя из молекул $SbCs_3$ (поскольку эффект наиболее отчетлив в области малых $h\nu$). Другой причиной можно считать существование преимущественного направления движения освобожденных электронов в толще слоя. Послед-

нее может быть связано с наименьшими потерями в результате рассеяния и поглощения электронов в слое или минимальным отражением на потенциальном барьере, т. е. с селективной прозрачностью того и (или) другого в определенном направлении [4]. Суждение по этому вопросу может иметь, однако, место лишь на основе накопления достаточных сведений о структуре Sb — Cs-слоев как энергетической, так и кристаллической.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Герлих, Х. Хора, Изв. АН СССР, Сер. физ., 1960, 24, 6, 698.
2. Ю з, Дю Бридж, Фотоэлектрические явления, ГТТИ, 1936.
3. Н. С. Хлебников, Е. А. Меламид, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 6, 1008.
4. R. H. Fowler, Proc. Roy. Soc. A, 1930, 128, 123; A. R. Olpin, Phys. Rev., 1931, 38, 1745.

Н. С. Хлебников, А. Е. Меламид

Поступило в редакцию
7 III 1961

Budapesti Műszaki Egyetem Könyvtára

CONTENTS

Basharinov A. E. Problems of statistics of automatic patern recognition using multiframe observation 1035

Fleishman B. S. Non-stationary regime of filling the memory of pattern recognition devices 1041

Ziatitskiy V. A. Modelling of filling the cybernetic devices memory by way of self-analysis. 1049

Nesteruk V. F. On the theory of optimum detection of a compound signal in a correlated noise 1055

Stratonovich R. L. Optimum reception of a narrow-band signal of unknown frequency in noise 1063

Dorman M. I. Spectrum of oscillation which frequency passes through zero . . . 1076

Tikhonov V. I. Markov nature of quasi-harmonic oscillations envelope 1082

Rizkin I. H. Characteristics of frequency dividers nonlinear elements 1092

Ivanchikov V. I. Some problems of electromagnetic waves refraction theory . . . 1100

Pavlov P. P. Electromagnetic field and current distribution along an infinite noninsulated conductor in conductive medium 1106

Khokhlov R. V. Wave propagation in nonlinear lines with dispersion 1116

Benenson L. S. Calculation of waves phase velocity in an artificial metal dielectric taking into account current harmonics on the structure elements 1128

Shestopalov V. P., Bulgakov A. A., Bulgakov B. M. Theoretical and experimental investigations of a helix dielectrical antenna 1136

Bakhrakh L. D., Vavilova I. V. Spherical two-mirror antennae 1146

Matveev R. F. Calculation of the side flow in a long waveguide line 1157

Gurevich S. B. Sensitivity of T. V. systems with different scanning parameters . 1165

Petrov E. N. On the theory of a plane-electrode triode with a zero space charge in a gap between the grid and the anode 1170

Braginskiy V. B., Dianova V. A., Mustel E. R. Investigation of frequency multiplier operation using p-n junction nonlinear capacitance 1173

Mikhailovskiy L. K., Makarishchev V. P., Pollak B. P., Fabrikov V. A. Nonlinear gyromagnetic effects of a nutation type in ferrites 1178

Mikaelian A. L., Antoniants V. Ya., Turkov Yu. G. Phenomena of cavity and ferrite coupling 1184

Rodak M. I. On calculation of high frequency field polarizations corresponding to extreme of transition probabilities in paramagnetic resonance 1194

BRIEF REPORTS

Wang Huan-cho. Calculation of a matching metal insert in a circular waveguide 1202

Fedotov A. P., Tepliakov V. A. Requirements to amplitudes and phases stability of the fields in linear accelerator cavities 1205

Fetina V. N. Even harmonics exitation in ferroresonance 1207

Nakhodkin N. G., Melnik P. V. Photoeffect in the region of soft x-rays 1209

LETTERS TO THE EDITOR

Petrov I. M., Tysliatskiy G. S. Concerning L. P. Kuklevv and Yu. P. Ozerskiy's article «Comparison of two decoding methods of interval codes» 1211

Kuklevv L. P., Ozerskiy Yu. P. Answer to I. M. Petrov and G. S. Tysliatskiy's letter 1213

Khlebnikov N. S., Melamid A. E. On the problem of the influence of the light polarization upon the photoeffect of complex cathodes 1215

Цена 1 руб. 38 коп.

1961 JUL 3